

Favoriser un enseignement efficace des
mathématiques à l'école primaire et au collège

Guide d'orientation

Education Endowment Foundation

2017

Ce rapport d'orientation a été rédigé par Peter Henderson (EEF), le professeur Jeremy Hodgen (University College London Institute of Education), le docteur Colin Foster (Université de Nottingham) et Dietmar Kuchemann (Université de Nottingham).

Ces auteurs étaient accompagnés par un groupe consultatif composé de Clare Christie (Ashley Down Schools Federation), Sally Freeman (Prestbury St. Mary's school), le professeur Jeremy Hodgen (University College London Institute of Education), Nikki Jones (Shireland Collegiate Academy), et la professeure Anne Watson (Université d'Oxford).

Les auteurs se sont fondés sur un examen des preuves de la recherche conduit par le professeur Jeremy Hodgen (University College London Institute of Education), le docteur Colin Foster (Université de Nottingham), la docteure Rachel Marks (Université de Brighton) et la professeure Margaret Brown (King's College Londres).

L'EEF souhaite remercier les nombreux chercheurs et praticiens qui ont apporté leur soutien et leurs commentaires aux ébauches de ce guide.

Table des matières

Note concernant la traduction	7
Avant-propos	9
Introduction.....	11
Les 8 recommandations	15
1. S'appuyer sur les évaluations	19
2. Utiliser des représentations	23
3. Résoudre des problèmes.....	27
4. Les connaissances mathématiques	31
5. Motivation	35
6. Exercices et ressources pédagogiques	39
7. Interventions structurées	45
8. Transition école-primaire / collège	47
Comment ce guide d'orientation a-t-il été élaboré ?.....	49
Glossaire	51
Références.....	53

Note concernant la traduction

Ce texte est la traduction du guide d'orientation *Improving mathematics in key stages two and three* publié en 2017 par Education Endowment Foundation (EEF). Les guides d'orientation de l'EEF sont librement téléchargeables sur leur site internet <https://educationendowmentfoundation.org.uk/>.

L'organisation de l'enseignement au Royaume-Uni diffère en plusieurs points de celle que l'on connaît en France. Notamment, des séances de soutien y sont communément mises en place (dénommées ici interventions) et de nombreux Teacher Assistant (représentant en moyenne le quart des effectifs des personnels en charge de l'enseignement) renforcent les équipes pédagogiques. Certaines recommandations seront donc à replacer dans leur contexte.

Pour faciliter la lecture de cette traduction par des français, le niveau des élèves a été traduit (ainsi le niveau *year 5* est devenu le niveau CM1). Le glossaire donne la liste des mots-clés utilisés dans ce guide et leur définition. Ces mots-clés sont soulignés à leur première apparition dans le texte.

Les conclusions du rapport d'orientation sont largement basées sur l'examen des preuves *Improving Mathematics in Key Stages Two and Three : Evidence Review* publié en 2018 par EEF et dont une analyse est proposée en français sur le site www.mathadoc.fr.

Le guide d'auto-évaluation *Improving mathematics in key stages two and three. A self-assessment guide* a également été traduit.

Ces traductions ont été rédigées en février 2022 par Nathalie ROQUES et ne sauraient en aucun cas engager la responsabilité d'Education Endowment Foundation.

Avant-propos

Quitter l'école avec un bon Certificat général de l'enseignement secondaire (*General Certificate of Secondary Education, GCSE*) en mathématiques est une condition préalable pour accéder à des études supérieures ou des formations professionnelles, et au-delà à des emplois qualifiés. Les compétences que nous développons à l'école nous sont également utiles dans la vie de tous les jours. Pourtant, trop de nos jeunes ne réussissent pas et courent de ce fait le risque d'une exclusion sociale et économique.

Ces élèves sont issus de manière disproportionnée de foyers défavorisés. En 2017, plus de la moitié des jeunes éligibles aux repas scolaires gratuits n'avaient pas atteint le niveau attendu en anglais et en mathématiques à l'âge de 16 ans. Un jeune sur deux issu de ménages à faibles revenus se voit ainsi refuser l'accès à la poursuite de ses études, et au-delà, à des carrières sûres et bien rémunérées. C'est une tragédie personnelle pour les individus concernés, mais également un gaspillage de talents à l'échelle nationale et un énorme obstacle à l'amélioration de la mobilité sociale.

Pour rompre enfin ce lien entre le revenu familial et le niveau d'études, nous devons commencer tôt et nous assurer que tous les jeunes, quelle que soit leur origine, aient accès à un enseignement des mathématiques à l'école primaire puis au secondaire le plus efficace possible.

À l'Education Endowment Foundation, nous pensons que la meilleure façon d'y parvenir est de mieux exploiter les données probantes : examiner ce qui a marché et ce qui n'a pas marché dans le passé peut nous mettre dans une bien meilleure position pour juger de ce qui est susceptible de marcher demain. Mais il peut être difficile de savoir par où commencer. On trouve des milliers d'études sur l'enseignement des mathématiques, dont les résultats sont, pour la plupart, publiés dans des articles universitaires et des revues peu accessibles. Les enseignants sont également inondés d'informations sur les programmes et les possibilités de formation, qui tous revendiquent un impact positif sur les apprentissages des élèves. Comment identifier les résultats les plus sûres, les plus fiables et les plus pertinents pour en faire profiter sa propre école et ses propres élèves ? C'est pour répondre à cette question que nous avons élaboré ce rapport d'orientation. Il repose sur huit recommandations pratiques et qui sont toutes fondées sur des preuves. Même si ces recommandations concernent tous les élèves, elles s'adressent tout particulièrement et en priorité à ceux qui rencontrent des difficultés en mathématiques. Pour identifier et développer ces recommandations, nous avons examiné les conclusions des meilleures recherches internationales disponibles sur ce sujet et consulté des experts, des enseignants et des universitaires pour définir les principes clés d'un enseignement efficace.

J'espère que ce rapport contribuera à soutenir en Angleterre un enseignement des mathématiques d'excellente qualité car fondé sur des données probantes ; un enseignement qui permettra à tous les enfants de profiter des meilleures opportunités possibles, et ce quelle

que soit leur origine sociale. Il s'agit d'un point de départ pour une approche plus factuelle de l'enseignement des mathématiques et l'EEF ainsi que ses partenaires (en particulier notre réseau d'écoles de recherche) produiront prochainement une gamme de ressources, d'outils et de formations pour vous aider à mettre en œuvre ces recommandations dans votre salle de classe.

Sir Kevan Collins

Chief Executive

Education Endowment Foundation

Introduction

De quoi parle ce guide ?

Ce guide concerne l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège (*key stage two and three*). La décision de concentrer l'attention sur ces niveaux d'étude a été prise après une première consultation auprès d'enseignants, d'universitaires et autres personnes ressources. Cette consultation a montré que ces niveaux d'études correspondaient à ceux pour lesquels un guide pourrait avoir un impact important car si les établissements attendent bien sûr des conseils leur permettant d'appliquer de nouveaux programmes, la transition des élèves de l'école primaire vers le collège reste également une question préoccupante.

Ce rapport n'a pas comme objectif d'être un guide complet sur l'enseignement des mathématiques. Nous avons élaboré des recommandations dans les domaines pour lesquels les résultats de la recherche peuvent être appliqués par les établissements pour améliorer significativement l'apprentissage des élèves, et nous nous sommes concentrés sur les questions qui suscitent tout particulièrement l'intérêt des praticiens. Certains éléments de l'enseignement des mathématiques ne sont pas abordés dans ce guide. Et pour ces éléments, les enseignants devront se baser sur leurs connaissances des mathématiques, leur expérience et leur jugement professionnels, mais aussi sur l'évaluations des connaissances et des compétences de leurs élèves.

L'objectif est de mettre en œuvre un enseignement efficace. Un enseignement des mathématiques d'un excellent niveau repose bien évidemment sur de bonnes connaissances mathématiques, mais ce n'est pas suffisant. Les enseignants efficaces savent aussi de quelle manière les élèves apprennent les mathématiques, connaissent les difficultés que ces derniers peuvent rencontrer et mettent en œuvre un enseignement efficace (1).

Ce guide est basé sur un examen des preuves portant sur l'enseignement efficace des mathématiques conduit par le professeur Jeremy Hodgen, le docteur Colin Foster, la docteure Rachel Marks et la professeure Margaret Brown. Ce guide n'est donc pas un nouvel examen des preuves, mais plutôt la traduction d'une synthèse de la recherche en conseils actionnables et clairs. Plus d'informations sur la manière dont ces conseils ont été élaborés est disponible à la fin de ce texte.

A qui s'adresse ce guide ?

Ce guide s'adresse en priorité aux personnes responsables de la formation des enseignants et à celles susceptibles de prendre des décisions permettant de mettre en œuvre un enseignement efficace des mathématiques dans les écoles primaires et les collèges. Les enseignants et les assistants d'enseignement (*Teaching Assistant*) trouveront également dans ce guide des ressources utiles pour les aider dans leur enseignement au quotidien. Il peut également être utile aux :

- personnes en charge du pilotage des établissements et aux parents pour soutenir et stimuler les praticiens,
- formateurs académiques pour construire leur offre de formation professionnelle à l'adresse des enseignants, et structurer les interventions proposées aux élèves,
- chercheurs en Sciences de l'éducation pour conduire de nouvelles recherches à partir des recommandations de ce guide dans le but de combler l'actuel manque de preuves dans certains domaines.

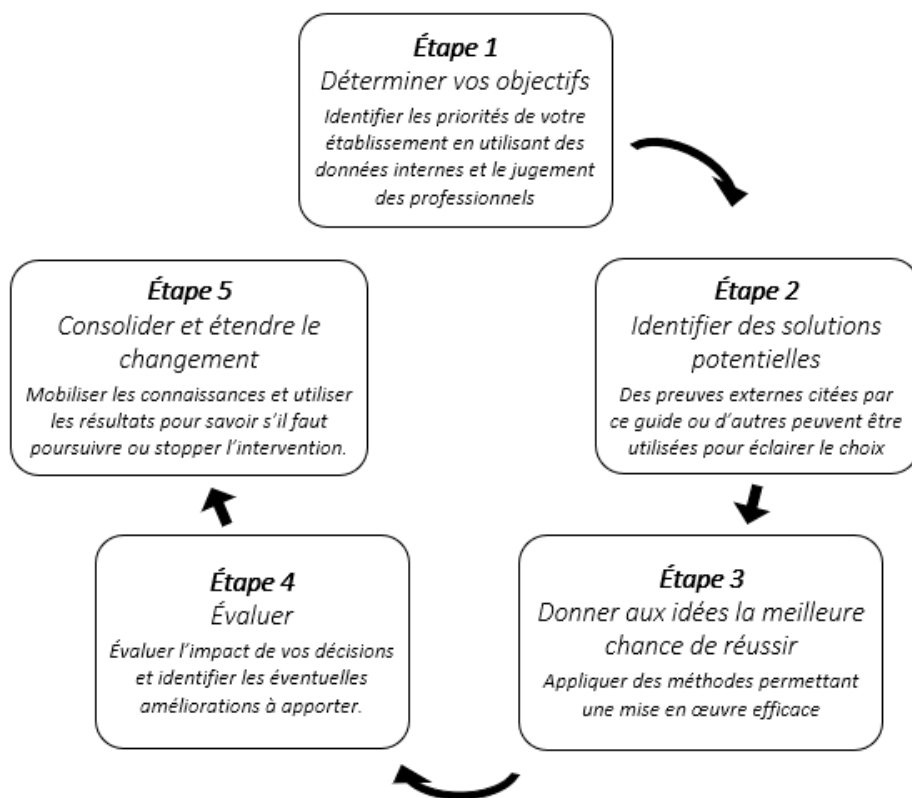
Comment utiliser ce guide

Nous reconnaissons que l'application effective de ces recommandations – c'est-à-dire de manière à ce qu'elles aient un réel impact sur les élèves – est certes cruciale mais également complexe. Voici les principaux points clés à considérer quand on souhaite appliquer ces recommandations.

1. La formation professionnelle (*Continuing Professional Development, CPD*) sera une composante importante de cette mise en œuvre car elle est indispensable pour améliorer la qualité de l'enseignement des praticiens tout comme leurs connaissances. Un résumé des meilleurs éléments probants concernant la formation professionnelle est disponible auprès du Teacher Development Trust¹.
2. Ces recommandations ne constituent pas une solution clé en main. Il est important de trouver un point d'équilibre entre une application précise et rigoureuse de ces recommandations et leur adaptation à un établissement scolaire particulier dans un contexte particulier. Appliquer les recommandations de façon efficace exige donc de considérer avec soin le contexte et de se fonder sur le jugement des professionnels.
3. Il est important de considérer les détails qui se cachent derrière les titres. Par exemples, les établissements ne devraient pas mettre en avant la recommandation 7 pour justifier la mise en œuvre d'un grand nombre d'interventions. Cette recommandation devrait plutôt provoquer des discussions pour définir la meilleure intervention à mettre en œuvre.
4. Inévitablement, les changements prennent du temps. Nous recommandons de prendre au moins deux trimestres pour planifier, développer et tester des stratégies à une petite échelle dans un premier temps, avant d'étendre de nouvelles pratiques à l'ensemble d'un établissement. Il conviendrait de trouver des personnes ressources volontaires pour mettre en pratique ce changement dans l'établissement et de prévoir des moments d'échanges réguliers durant l'année pour travailler sur ce projet et analyser les progrès observés.

¹ <http://tdtrus.org/about/dgt>

Figure 1. Le cycle des améliorations basées sur des preuves



EEF propose les soutiens suivants pour appliquer les recommandations de ce guide.

- En partenariat avec l'Institute for Effective Education, un réseau national d'Établissements de Recherche (*Research Schools*) a été créé. Ces établissements sont appelés à devenir des lieux ressources permettant de développer dans leur région des pratiques fondées sur des preuves, de construire des réseaux comprenant un grand nombre d'établissements, et de permettre le passage à l'échelle. Plus d'informations sur ce réseau et sur la manière dont il soutient la mise en œuvre des guides d'orientation publiés par EEF peuvent être trouvées sur <https://researchschool.org.uk>
- Un certain nombre de ressources seront produites par EEF et ses partenaires pour soutenir l'application de ce guide, comme par exemple des audits et des outils permettant de conduire des observations.
- Un guide à paraître fera des recommandations au sujet de l'application des approches basées sur des preuves. Il utilisera les meilleures connaissances disponibles à ce jour et concernera la mise en œuvre de projets, et examinera les rôles joués par les chefs d'établissements, les organismes de formation et les évaluations. Ce rapport sera disponible sur <https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/>²

² Ce rapport a depuis été publié sous le titre *Putting evidence to work. A school's guide to implementation*, décembre 2019.

Les 8 recommandations

1. S'appuyer sur les évaluations pour construire un enseignement fondé sur les connaissances et les compétences des élèves

- L'évaluation ne devrait pas être uniquement utilisée pour évaluer le niveau global des élèves mais devrait fournir aux enseignants des informations sur ce que les élèves savent et sur ce qu'ils ne savent pas.
- Elle devrait servir de base pour planifier les futures leçons et déterminer les objectifs d'un soutien ciblé.
- Une rétroaction efficace est un élément important de l'exploitation par l'enseignant d'une évaluation.
- Les rétroactions doivent être précises et claires, encourager et soutenir de futurs efforts et être données avec parcimonie.
- Les enseignants doivent se préoccuper des idées fausses mais aussi comprendre pourquoi les élèves peuvent persister dans l'erreur.
- La connaissance des idées fausses les plus courantes est précieuse pour planifier des leçons en tenant compte des erreurs potentielles avant qu'elles ne surviennent.

2. Utiliser des représentations concrètes et semi-concrètes

- Les représentations concrètes (matériels utilisés pour enseigner les mathématiques) et les représentations semi-concrètes (par exemple des droites numériques et des représentations graphiques) permettent aux élèves de se mobiliser sur des sujets mathématiques.
- Cependant, les représentations concrètes et semi-concrètes ne sont que des outils : la manière dont elles sont employées est primordiale.
- Elles doivent être utilisées correctement et à bon escient pour avoir un impact.
- Il doit y avoir une justification claire pour utiliser une représentation particulière pour enseigner un concept mathématique particulier.
- Les représentations concrètes doivent être utilisées de façon temporaire ; elles devraient jouer le rôle de « tuteur » qui devrait être supprimé une fois que les élèves en deviennent indépendants.

3. Enseigner aux élèves des stratégies leur permettant de résoudre les problèmes

- Si les élèves n'ont pas une méthode de résolution bien rodée et immédiatement employable, ils ont besoin de porter leur attention sur des stratégies de résolution pour donner du sens à une situation non familière.

- Sélectionner des exercices portant sur la résolution de problèmes pour lesquels les élèves n'ont pas de solutions prêtes à l'emploi.
- Enseigner différentes méthodes de résolution de problèmes et les comparer.
- Montrer aux élèves comment chercher et exploiter leurs connaissances afin de résoudre les problèmes.
- Exploiter des exemples résolus pour leur permettre d'analyser l'utilisation des différentes stratégies.
- Demander aux élèves d'analyser et d'expliciter leurs résolutions de problèmes.

4. Permettre aux élèves de développer un riche réseau de connaissances mathématiques

- Souligner les multiples connexions entre les faits mathématiques, les procédures et les concepts.
- S'assurer que les élèves développent une bonne fluence en ciblant certaines compétences mathématiques.
- Expliquer aux élèves les procédures qu'ils doivent apprendre.
- Apprendre aux élèves à choisir soigneusement entre plusieurs stratégies mathématiques.
- S'appuyer sur les connaissances informelles des élèves concernant le partage et la proportionnalité pour introduire des procédures plus expertes.
- Enseigner aux élèves que les fractions et les nombres décimaux élargissent le système numérique au-delà des nombres entiers.
- Apprendre aux élèves à reconnaître et à s'appuyer sur les concepts mathématiques.

5. Développer l'autonomie et la motivation des élèves

- Encourager les élèves à prendre des responsabilités et à jouer un rôle actif dans leur propre apprentissage.
- Cela implique que les élèves développent des compétences métacognitives – la capacité de planifier de façon autonome, de surveiller et d'évaluer leurs raisonnements et leurs apprentissages.
- Au début, les enseignants peuvent avoir besoin de modéliser les processus métacognitifs en explicitant leurs propres raisonnements.
- Donner de multiples occasions aux élèves de développer leurs compétences métacognitives en les encourageant à expliquer leur raisonnement, à eux-mêmes comme aux autres.
- Éviter d'en faire trop et trop vite.
- Développer une attitude positive vis-à-vis des mathématiques est important, mais peu de preuves concernent les actions qui auraient un impact dans ce sens.

- Les chefs d'établissement devraient s'assurer que tout le personnel, y compris le personnel non enseignant, favorise le plaisir à faire des mathématiques chez tous les élèves.

6. Exploiter des exercices et des ressources pédagogiques pour stimuler les élèves et leur permettre d'améliorer leurs compétences mathématiques

- Les exercices et les ressources pédagogiques ne sont que des outils – ils ne seront pas efficaces s'ils sont utilisés de façon inappropriée par l'enseignant.
- Exploiter l'évaluation des points forts et des points faibles des élèves pour sélectionner les exercices.
- Utiliser des exercices pour traiter les idées fausses des élèves.
- Donner des exemples et des contre-exemples pour chaque concept.
- Utiliser des problèmes verbaux pour permettre aux élèves de comprendre les mathématiques.
- Les outils technologiques ne sont pas des baguettes magiques – ils doivent être utilisés de façon judicieuse et des ressources moins coûteuses peuvent être tout aussi efficaces.

7. Mettre en œuvre des interventions pour proposer un soutien supplémentaire

- L'identification des élèves devrait être basée sur leurs évaluations.
- Les interventions doivent démarrer tôt, être conçues à partir de données probantes et soigneusement planifiées.
- Durant les interventions l'enseignement doit être explicite et systématique.
- Même l'intervention la mieux pensée ne sera pas efficace si elle n'est pas correctement mise en œuvre.
- Aider les élèves à comprendre comment l'intervention est connectée à l'enseignement en classe entière.
- Les interventions doivent être motivantes pour les élèves – ne pas les ennuyer ni les rendre anxieux.
- Si les interventions empêchent les élèves de pratiquer des activités qu'ils aiment ou d'apprendre d'autres contenus, les enseignants doivent se demander si l'intervention est vraiment nécessaire.
- Éviter la fatigue liée à l'intervention. Les interventions n'ont pas toujours besoin d'être longues ni intensives pour être efficaces.

8. Faciliter la transition des élèves de l'école primaire vers le collège

- Une forte dégradation des résultats mathématiques comme des attitudes vis-à-vis des mathématiques est observée quand les élèves, quittant l'école primaire, arrivent au collège.
- Les écoles primaires et les collèges devraient partager leur interprétation des programmes, de l'enseignement et des apprentissages.
- Quand les élèves arrivent en 6^{ème}, il faut rapidement avoir une bonne connaissance de leurs points forts et de leurs points faibles.
- Des interventions structurées peuvent être nécessaires pour les élèves de 6^{ème} qui ont du mal à progresser.
- Porter attention à la manière dont les élèves sont répartis dans les classes de mathématiques.
- Regrouper les élèves par niveau (*setting*) amène probablement à augmenter les écarts entre les résultats des élèves socialement défavorisés et les résultats des autres élèves, car les premiers sont plus susceptibles d'être affectés à des groupes de niveau faible.

1. S'appuyer sur les évaluations

S'appuyer sur les évaluations pour construire un enseignement fondé sur les connaissances et les compétences des élèves

Les connaissances et les compétences mathématiques peuvent être considérées comme constituées de plusieurs composantes et il est tout à fait possible que des élèves soient performants dans l'une de ces composantes et moins performants dans d'autres (2). Il est donc important que l'évaluation des élèves ne soit pas seulement utilisée pour évaluer de façon globale les connaissances des élèves mais qu'elle permette également aux enseignants de récolter des informations actualisées et précises sur ce que les élèves savent et sur ce que les élèves ne savent pas. Ces informations devraient permettre aux enseignants d'adapter leur enseignement pour le construire sur la base des connaissances des élèves, de repérer leurs faiblesses et de cibler les prochaines étapes nécessaires à la poursuite de leurs progrès. Les évaluations peuvent se baser sur des tests diagnostiques, mais aussi sur les informations fournies par les évaluations formatives, l'observation informelle des élèves ou en échangeant avec eux sur des sujets mathématiques. Plus d'informations sur la façon de mener des évaluations utiles et précises sont disponibles dans le guide *EEF Guidance on Assessing and Monitoring Pupil Progress*, téléchargeable sur internet.

S'appuyer sur les évaluations

La connaissance par les enseignants des points forts et des points faibles des élèves devrait leur permettre de planifier les leçons à venir et de définir les objectifs de certaines interventions ciblées (voir la recommandation 7). Les enseignants peuvent aussi avoir besoin de mettre en œuvre une nouvelle approche quand ils se rendent compte que ce qu'ils ont fait dans un premier temps ne marche pas. Une rétroaction efficace sera une partie importante de l'utilisation par l'enseignant des informations fournies par l'évaluation. Les caractéristiques d'une rétroaction efficace sont les suivantes (3) :

- **Être spécifique, précis et clairs** (par exemple « *tu sais factoriser des nombres de façon efficace maintenant car tu utilises des facteurs plus grands et tu es plus rapide* » au lieu de « *tes factorisations sont vraiment meilleures* »).
- **Fournir des rétroactions avec parcimonie de façon à ce qu'elles soient incitatives** (par exemple « *L'un des angles que tu as calculé dans ce problème est faux – peux-tu trouver lequel et le corriger ?* »).
- **Comparer ce que l'élève fait de façon correcte maintenant à ce qu'il faisait de façon incorrecte précédemment** (par exemple « *la valeur approchée du résultat que tu as calculée est bien plus pertinente que celles que tu calculais précédemment* »).

- **Encourager et soutenir les efforts supplémentaires** en aidant les élèves à identifier les exercices difficiles qui demandent plus d'attention (par exemple « *tu dois faire plus attention en vérifiant que ta réponse finale soit plausible et raisonnable* »).
- **Donner des informations aux élèves sur la manière de répondre aux commentaires des enseignants** et leur donner le temps de le faire.
- **Donner des informations précises sur la manière de s'améliorer** plutôt que de ne signaler aux élèves que leurs erreurs (par exemple « *quand tu n'es pas sûr de savoir s'il faut additionner ou soustraire des nombres, essaye de les placer sur une droite numérique* » plutôt que « *ta réponse ne devrait pas être 3 mais -3* »).

Les rétroactions doivent être efficaces. Les établissements doivent veiller à ce que leur volonté de fournir des rétroactions efficaces ne conduise pas à mettre en œuvre des politiques couteuses et à une charge de travail importante pour les enseignants (4). Des rétroactions efficaces peuvent être données oralement ; elles n'ont pas à être données nécessairement par écrit. Un résumé des preuves concernant différentes méthodes d'évaluation et leurs impacts sur la charge de travail (*A marked Improvement*) est disponible sur le site de EEF.

Se préoccuper des idées fausses

Une idée fausse (*misconception*) est une incompréhension qui conduit à des erreurs systématiques (5). Les idées fausses sont souvent formées à partir d'une propriété qui est appliquée en dehors du contexte dans lequel elle est vraie. Par exemple « *un produit est supérieur à chacun des facteurs, ou bien le quotient est inférieur au dividende* » ne s'applique qu'à des nombres entiers positifs supérieurs à 1. Quand d'autres nombres sont utilisés (par exemple des nombres inférieurs ou égaux à 1), cette propriété, appliquée hors de son contexte originel, devient une idée fausse.

Il est important que les idées fausses soient décelées et prises en compte plutôt que mises de côté ou ignorées. Les élèves vont souvent défendre leurs idées fausses, particulièrement quand ces dernières sont basées sur des idées correctes mais seulement dans un cadre limité. Dans ce genre de situation, les enseignants peuvent réfléchir à la manière dont ces idées fausses se sont construites et explorer avec l'élève la vérité partielle sur laquelle elles ont été bâties et les circonstances dans lesquelles elles ne s'appliquent plus (6). Des contre-exemples peuvent être efficaces en mettant à l'épreuve l'idée fausse d'un élève. Cependant, les élèves ont parfois besoin de temps et les enseignants ont besoin de soutenir le développement de concepts plus riches et plus robustes pour établir des idées justes plus générales.

La connaissance sur les idées fausses courantes en mathématiques est inestimable pour préparer puis exploiter les résultats d'une évaluation, comme pour anticiper les difficultés que les élèves risquent de rencontrer (7). Les enseignants qui connaissent les idées fausses les plus courantes peuvent planifier leurs leçons en tenant compte de ces idées fausses avant

qu'elles ne se construisent chez l'élève, en donnant et en comparant des exemples et des contre-exemples quand ils enseignent de nouveaux concepts.

Résumé des preuves

- Les rétroactions ont montré avoir des effets importants sur l'apprentissage. L'examen des preuves a identifié deux méta-analyses indiquant que les rétroactions ont le même effet en mathématiques que dans d'autres disciplines. Une variabilité importante sur les effets rapportés a été soulignée et les rétroactions peuvent avoir sur les apprentissages des effets négatifs aussi bien que positifs.
- Une littérature détaillée existe sur les idées fausses souvent développées de façon courante par les élèves quand ils apprennent les mathématiques.

2. Utiliser des représentations

Utiliser des représentations concrètes et semi-concrètes

Les représentations concrètes et semi-concrètes sont des outils puissants qui permettent aux élèves de mieux comprendre certaines idées mathématiques. Cependant, ces représentations ne sont que des outils, et la façon dont elles sont utilisées est primordiale : employées à bon escient et de façon appropriée, elles peuvent avoir un impact positif important (8). Les enseignants doivent s'assurer qu'une raison claire justifie l'utilisation d'une représentation particulière dans le but d'enseigner un concept mathématique spécifique. L'objectif est d'utiliser des représentations pour révéler des concepts mathématiques et rendre les élèves capables de comprendre et d'utiliser les mathématiques indépendamment de ces outils.

A quoi ressemble l'utilisation efficace des représentations concrètes ?

Les représentations concrètes peuvent être utilisées à l'école primaire et au collège. Les considérations clés basées sur des éléments probants sont les suivantes :

- **S'assurer qu'une raison claire** justifie l'utilisation d'une représentation concrète particulière pour enseigner un concept mathématique spécifique. Les représentations concrètes doivent être utilisées pour apporter des connaissances sur des sujets mathématiques de plus en plus sophistiqués.
- **Faire en sorte que les élèves comprennent le lien entre les représentations concrètes et les concepts mathématiques qu'elles représentent** (10). Cela exige des enseignants qu'ils encouragent les élèves à faire le lien entre les objets (et leurs manipulations) et les mathématiques associées à la situation, de connaître les limites de ces représentations concrètes et de développer des images mathématiques associées, des représentations semi-concrètes et des symboles (11).
- **Éviter que les élèves ne deviennent dépendants des représentations concrètes** pour résoudre un exercice ou répondre à une question. Une représentation concrète devrait permettre à un élève de comprendre les mathématiques en éclairant les relations générales sous-jacentes, et pas seulement de « trouver la réponse » à un problème donné (12).
- **Les représentations concrètes sont des tuteurs qui devraient être supprimés** une fois que les élèves en deviennent indépendants. Avant d'utiliser une représentation concrète, il est important de considérer comment elle peut permettre aux élèves de faire des mathématiques sans elles. Quand les représentations concrètes ne sont plus utilisées, les élèves peuvent trouver utile d'utiliser des diagrammes ou d'imaginer ces représentations concrètes.

- **Les représentations concrètes peuvent être utilisées par des élèves de tout âge.** La décision de supprimer une représentation concrète devrait être prise en fonction des connaissances et compétences de l'élève, pas de son âge.

Que penser des représentations semi-concrètes ?

Les éléments probants indiquent que les droites numériques sont des représentations efficaces pour l'enseignement à l'école primaire et au collège, et que l'utilisation de diagrammes comme stratégie de résolution d'un problème doit être encouragée. Les preuves spécifiques concernant l'utilisation de représentations semi-concrètes d'une façon plus générale sont peu nombreuses. Cependant, il est probable que les points soulignés ci-dessus concernant les représentations concrètes s'appliquent aux représentations semi-concrètes.

Encadré A : les représentations concrètes et semi-concrètes

Une représentation concrète est un objet que les élèves ou les enseignants peuvent toucher et manipuler, et qui est utilisé pour enseigner et apprendre les mathématiques. Des réglettes Cuisenaire ou des blocs de base 10 sont des exemples de représentations concrètes courantes.

Le terme 'représentation' se réfère à une forme particulière qui représente une idée mathématique (9).

Exemples de différentes représentation semi-concrètes :

- Deux fractions placées sur une droite numérique
- Une fonction quadratique donnée par sa représentation graphique
- Une distribution de probabilité représentée par un tableau ou un histogramme.

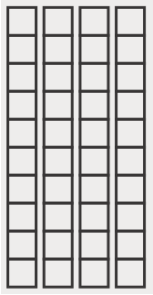
Encadré B

L'enseignant dit « *donnez moi un nombre à deux chiffres se terminant par 0* ». Un élève répond « *quarante* ». L'enseignant dit « *je vais soustraire le chiffre de ses dizaines à ce nombre : $40 - 4 = 36$* ». Les élèves essayent avec d'autres nombres à deux chiffres se terminant par 0 et découvrent que les résultats sont toujours des multiples de 9.

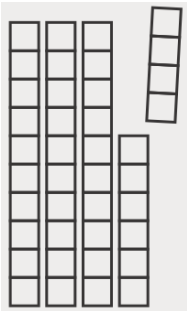
L'enseignant dit « *je vais utiliser des cubes pour voir si cela peut nous aider à comprendre pourquoi on obtient toujours un multiple de 9* ».

L'enseignant fait 4 colonnes de 10 cubes chacune.

« *Voilà, on a 40 ici. A quoi cela ressemble si j'enlève 4 cubes ?* »

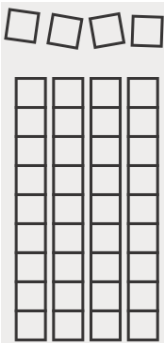


Un élève vient devant les autres élèves et enlève 4 cubes.



« Comment pourrions-nous faire autrement ? » demande l'enseignant.

Un autre élève enlève les 4 cubes d'une autre manière.



Un élève dit « ah oui ! Si on enlève un cube de chacune des colonnes de 10, alors il en reste 4 fois 9 cubes »

L'enseignant écrit : $40 - 4 = 10 \times 4 - 1 \times 4 = 9 \times 4$

$70 - 7 = 7 \times 10 - 7 \times 1 = 7 \times 9$

et les élèves discutent de ce qu'ils ont découvert, avant que l'enseignant ne termine en généralisant de la manière suivante :

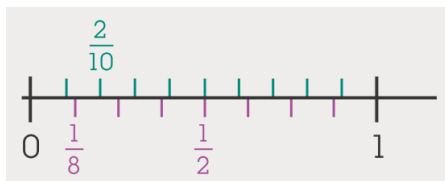
$$10t - t = (10 - 1)t = 9t$$

Encadré C : utiliser la droite numérique

L'enseignante a remarqué que certains élèves n'additionnent pas correctement des fractions et continuent d'additionner les numérateurs et les dénominateurs entre eux. Elle donne à la classe l'exercice suivant :

« Est-il vrai que $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{2}{10}$? »

Certains élèves remarquent que $\frac{2}{10}$ est inférieur à $\frac{1}{2}$. Avec l'aide de l'enseignante, les élèves représentent les trois fractions en les plaçant sur une droite numérique.



Cela permet aux élèves de voir que $\frac{1}{2}$ est égale à $\frac{4}{8}$ et de trouver que la réponse est $\frac{5}{8}$.

Les élèves inventent ensuite leurs propres exemples d'additions correctes et fausses en utilisant les droites numériques pour donner du sens à leurs propositions.

Alors que d'une façon générale l'utilisation de plusieurs représentations semi-concrètes semblent avoir un impact positif sur les apprentissages, des recherches supplémentaires sont attendues pour que les enseignants sachent comment les choisir, mais aussi à quel moment et à quelle fréquence les utiliser (13). Des éléments probants prometteurs montrent que les discussions au sujet de plusieurs représentations semi-concrètes et de leurs comparaisons, permettraient d'améliorer la compréhension conceptuelle des mathématiques par les élèves. Les enseignants devraient sélectionner avec soin différentes représentations semi-concrètes associées à des concepts mathématiques pour en discuter mais aussi pour les comparer, avec comme objectif de permettre aux élèves de développer des représentations plus abstraites, comme par exemple des diagrammes. Si l'utilisation de plusieurs représentations semi-concrètes semble faciliter la compréhension, les enseignants doivent cependant être conscients qu'utiliser simultanément un grand nombre de représentations est susceptible de semer la confusion chez les élèves et d'entraver par là-même leurs apprentissages (14).

Résumé des preuves

- L'examen des preuves a repéré cinq méta-analyses pertinentes concernant l'utilisation des représentations concrètes et semi-concrètes. Le niveau de preuve le plus élevé était associé à l'utilisation de représentations concrètes.
- Deux synthèses systématiques du What Works Clearinghouse ont apporté des éléments probants qui soulignent l'efficacité de l'utilisation de représentations visuelles, plus particulièrement pour la résolution des problèmes et pour aider les élèves en difficulté en mathématiques.

3. Résoudre des problèmes

Enseigner aux élèves des stratégies leur permettant de résoudre les problèmes

La résolution de problèmes se réfère le plus souvent à des situations où les élèves n'ont pas à leur disposition immédiate une méthode qu'ils peuvent mettre en œuvre pour trouver la solution. Au lieu de cela, ils doivent approcher le problème de manière flexible et trouver une solution par eux-mêmes. Pour y parvenir, les élèves doivent se fonder sur une variété de stratégies de résolution de problèmes (encadré D) qui leur permet de donner du sens à des situations non familières et de les affronter avec intelligence.

Les éléments probants suggèrent que les enseignants devraient considérer les points suivants quand ils souhaitent développer ces compétences (15) :

- **Sélectionner des problèmes à résoudre pour lesquels les élèves n'ont pas de méthodes de résolution toute faites.** Effectuer des opérations de routine dans un contexte particulier, ou chercher à résoudre des problèmes verbaux qui ont comme objectif de mettre en œuvre une méthode spécifique, sont parfois considérés comme des problèmes à résoudre. Mais si les élèves n'ont qu'à transposer une procédure ou un algorithme pour répondre à une question, alors ils n'ont pas été réellement confrontés à une résolution de problème, mais plutôt à l'application d'une procédure.
- **Organiser l'enseignement de manière à ce que des problèmes avec des structures similaires mais se déployant dans des contextes différents soient présentés ensemble, et, de la même manière, que des problèmes partageant un même contexte mais présentant des structures différentes soient également présentés simultanément.** Les élèves ont besoin d'être confrontés au besoin de repérer des motifs mathématiques similaires sous-jacents à plusieurs situations ; et aussi de repérer et d'interroger les multiples relations entre plusieurs variables dans une situation donnée.
- **Apprendre aux élèves à utiliser des approches différentes et les comparer.** Il y a souvent plusieurs manières d'approcher un problème. Beaucoup peut être appris en examinant les différentes solutions apportées à un même problème et en observant les similitudes dans les méthodes de résolutions de problèmes différents. Les élèves devront apprendre à distinguer les similitudes superficielles (par exemple deux problèmes à propos de carottes) et des similitudes profondes, liées à la structure mathématique, qui font que des stratégies similaires sont efficaces (comme deux problèmes dans un contexte différent mais qui porte sur des agrandissements).
- **Apprendre aux élèves à chercher et à exploiter leurs connaissances des mathématiques utiles pour résoudre un problème.** Les élèves devraient être encouragés à mobiliser leurs connaissances stratégiques concernant des problèmes similaires qu'ils ont déjà rencontrés et résolus avec succès, et aussi leurs connaissances de faits et concepts mathématiques qui pourraient être pertinents.

- **Encourager les élèves à utiliser des représentations.** Aider les élèves à utiliser de façon appropriée des diagrammes et d'autres représentations pour mettre en lumière la structure du problème et donner des pistes pour sa formulation mathématique.
- **Utiliser des exemples résolus pour permettre aux élèves d'analyser l'utilisation de différentes stratégies.** Des exemples résolus présentent le problème accompagné d'une réponse correcte, ce qui élimine la nécessité de conduire les procédures requises pour trouver la solution, et permet aux élèves de se concentrer sur le raisonnement et les stratégies employées. Les exemples résolus peuvent être complets, incomplets ou incorrects et comporter de façon délibérée des erreurs courantes basées sur des idées fausses que les élèves doivent débusquer. Analyser des exemples résolus permet aux élèves de développer une compréhension plus profonde du processus logique mis en œuvre dans la résolution d'un problème.
- **Demander aux élèves de repérer, d'analyser et d'explicitier leur raisonnement et leur choix de stratégie.** Quand ils travaillent sur un problème, encourager les élèves à se poser des questions comme « *Qu'est-ce que j'essaye de trouver ?* », « *Comment je peux y arriver ?* », « *Est-ce que l'approche que j'ai choisie est efficace ?* » et « *Quelles autres approches pourrais-je essayer ?* ». Quand le problème a été résolu, encourager les élèves à se poser des questions comme « *Qu'est-ce qui a bien marché pour résoudre ce problème ?* », « *Qu'est-ce qui n'a pas bien marché ?* », « *Quels autres problèmes pourraient être résolus avec ce type d'approche ?* », « *Quels problèmes similaires à celui-ci ai-je résolu dans le passé ?* ». Les élèves devraient pouvoir communiquer à l'oral et à l'écrit leurs réflexions (en utilisant des représentations, des expressions algébriques ou des équations) aux autres élèves et également à leur enseignant.

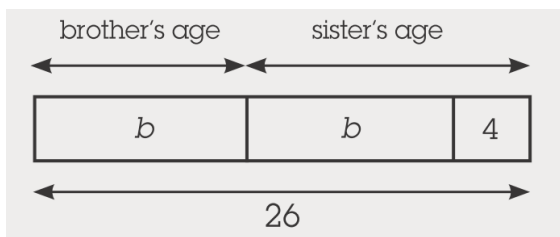
Encadré D : qu'est-ce qu'une stratégie de résolution de problème ?

Une stratégie de résolution de problème est une approche générale permettant de résoudre un problème. Cette même stratégie générale peut être appliquée pour résoudre une variété de problèmes différents. Par exemple, une stratégie de résolution efficace consiste à identifier un problème similaire mais plus simple. Discuter de la résolution de ce problème plus simple peut donner des idées sur la manière dont le problème actuel, plus difficile, peut être abordé et permettre de reconnaître la structure mathématique sous-jacente. Une stratégie est différente d'un algorithme, séquence bien définie d'étapes prédéterminées qui sont exécutées dans un ordre établi pour mener à bien une procédure communément mise en œuvre.

Encadré E : utiliser le diagramme en bandes pour comparer deux stratégies

Une classe travaille sur ce problème : *Katia a 4 ans de plus que son frère. La somme de leurs âges est égale à 26. Quels âges ont-ils ?*

Un élève utilise un diagramme en bande pour résoudre le problème :

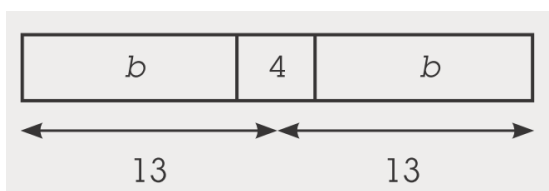


$b + b + 4 = 26$ donc $2b = 22$ et donc $b = 22/2 = 11$. Donc le frère a 11 ans et la sœur a 15 ans.

Une autre élève dit « *ne pourrions-nous pas diviser 26 par 2 et ensuite enlever ou ajouter 4 ? et donc leur âge serait $13 + 4 = 17$ ans pour la sœur et $13 - 4 = 9$ ans pour le frère ?* »

Un autre élève répond « *non, il ne faudrait pas ajouter ou retrancher 4, mais ajouter ou retrancher 2* ».

L'enseignante représente la nouvelle version du diagramme en bande :



« *Comment ce diagramme nous permet de comprendre s'il faut ajouter et retrancher 4 ou 2 ?* »

Une élève termine en disant : « *il y a deux bandes représentant b dans 26, et il n'y a qu'une seule bande représentant 4, donc il était juste d'ajouter ou soustraire 2, et non 4* ».

Résumé des preuves

- L'examen des preuves a repéré trois méta-analyses pertinentes concernant l'enseignement portant sur la résolution de problèmes. Elles ont apporté certains éléments probants mais ont également souligné que les effets étaient variables.
- Une synthèse systématique du What Works Clearinghouse a montré que certaines approches spécifiques à l'enseignement portant sur la résolution de problèmes étaient soutenues par des preuves. Ainsi, l'utilisation de représentations et d'exemples résolus est associée à un niveau de preuve maximal, et il est conseillé d'encourager les élèves à repérer et à analyser les processus de résolution de certaines catégories de problèmes.

4. Les connaissances mathématiques

Permettre aux élèves de développer un riche réseau de connaissances mathématiques

Cette recommandation s'appuie sur des preuves concernant l'enseignement de sujets mathématiques spécifiques. Bien que cette recommandation concerne des sujets particuliers, l'enseignement devrait toujours mettre en lumière les nombreuses connexions reliant des faits, des procédures et des concepts mathématiques, constituant par là-même un réseau de connaissances riche et significatif.

Actuellement, les preuves qui concernent les approches permettant de développer un enseignement efficace sont plus fortes quand ce dernier porte sur les nombres (incluant les fractions, les ratios et les proportions) et l'algèbre, que quand il porte sur d'autres sujets comme la géométrie. Cependant, il est probable que certaines des approches décrites ci-dessous (en particulier choisir entre plusieurs stratégies, porter de l'attention aux concepts mathématiques et construire à partir des connaissances informelles des élèves) puisse s'appliquer à de nombreux sujets mathématiques. Les enseignants devraient adopter de telles approches tout en se basant sur leurs connaissances mathématiques, leur propre expérience professionnelle et les autres recommandations de ce guide.

S'assurer que les élèves développent des compétences de calculs (fluence)

Calculer rapidement est important pour réussir en mathématiques (16). Il est probable que des élèves qui ont des difficultés à additionner, soustraire, multiplier et diviser, y compris quand ces compétences concernent les compléments (à 10, à 50, ...) et les multiples d'un nombre, auront des difficultés à comprendre et utiliser les concepts mathématiques qu'ils rencontreront plus tard dans leurs études.

Expliquer aux élèves les procédures qu'ils doivent apprendre

Les élèves sont capables d'appliquer des procédures de façon plus efficace quand ils comprennent comment elles marchent et dans quelles circonstances elles sont utiles (17). Se souvenir rapidement d'une procédure est important, mais les enseignants devraient s'assurer qu'un temps suffisant est accordé sur le développement de leur compréhension. Rendre les élèves capables de reconstruire les étapes d'une procédure qu'ils auraient oublié est une des raisons qui pousse à favoriser cette compréhension (18). Les recommandations de ce guide sur les représentations visuelles, les idées fausses et la résolution de problèmes issus de la vie courante, sont ici très utiles.

Apprendre aux élèves à choisir entre plusieurs stratégies mathématiques

Les enseignants devraient aider les élèves à comparer et à choisir entre différentes méthodes et stratégies pour résoudre des problèmes numériques ou algébriques, mais également dans d'autres domaines. Les élèves devraient savoir poser des opérations, calculer mentalement et utiliser la calculatrice, et devraient être encouragés à identifier les situations où ces méthodes sont appropriées et efficaces.

Les preuves suggèrent que l'utilisation de la calculatrice ne limite pas la plupart du temps les compétences des élèves en calcul mental ou en calcul posé. En fait, les études ont montré que l'utilisation d'une calculatrice peut avoir un impact positif sur la résolution des problèmes et sur l'attitude vis-à-vis des mathématiques, mais aussi sur les compétences en calcul mental (19). L'utilisation de la calculatrice devrait être intégrée dans l'enseignement du calcul mental et autres méthodes de calcul, et les élèves devraient apprendre à prendre des décisions fondées sur quand, où et pourquoi utiliser une méthode de calcul particulière. L'objectif est de rendre les élèves capables de s'auto-réguler quant à l'utilisation de la calculatrice, et en conséquence de l'utiliser moins souvent mais à bon escient (20).

S'appuyer sur les connaissances informelles des élèves (comme les raisonnements multiplicatifs) pour introduire de nouvelles procédures

Le raisonnement multiplicatif est la capacité à comprendre et à concevoir les multiplications et les divisions. C'est une compétence importante qui est requise pour résoudre des exercices qui mettent en jeu des ratios, des grandeurs composées quotients et des proportions, et qui est souvent exploitée lors de la résolution des problèmes issus de la vie courante, comme par exemple des problèmes d'optimisation de coûts. Ainsi, une idée fautive courante – quand on demande la quantité requise pour 10 personnes à partir d'une recette pour 4 personnes – conduit certains élèves à ajouter 6 (car la différence entre les nombres de personnes est égale à 6), plutôt que de multiplier par $2\frac{1}{2}$, ou de doubler puis d'ajouter la moitié (car le ratio est de 4 : 10 donc 2 : 5 donc 1 : $2\frac{1}{2}$).

Certaines preuves indiquent que retarder l'enseignement de méthodes formelles dans l'objectif de développer les raisonnements multiplicatifs des élèves, est bénéfique (21). Les enseignants devraient envisager de proposer plusieurs exercices dans des contextes différents et de difficulté progressive, en exploitant les connaissances informelles des élèves. Après avoir introduit des procédures formelles et des algorithmes, les enseignants devraient revenir sur les stratégies informelles des élèves et montrer pourquoi elles conduisent aux mêmes réponses mais aussi pourquoi et dans quelles situations elles peuvent se montrer moins efficaces.

Enseigner aux élèves que les fractions et les nombres décimaux élargissent le système numérique au-delà des nombres entiers

Les fractions sont souvent présentées aux élèves comme représentant une partie d'un tout – par exemple, un demi est une partie de l'unité partagée en deux parties égales. C'est un concept important, mais cette conception convient mal aux fractions mixtes supérieures à 1. Un autre concept important est souvent ignoré : les fractions sont des nombres qui peuvent être représentés sur une droite numérique. Elles ont une magnitude ou une valeur, et peuvent être conçues comme des nombres compris entre des nombres entiers consécutifs (22).

Comprendre que des fractions sont des nombres, et être capable de les placer sur une droite numérique, permet aux élèves d'estimer le résultat de la somme de deux fractions et de reconnaître et de s'intéresser à des idées fausses comme l'erreur courante consistant à additionner les numérateurs et les dénominateurs entre eux.

Les droites numériques sont des outils utiles pour enseigner ces concepts. Elles peuvent être utilisées pour :

- Représenter la magnitude ou valeur des fractions, des nombres décimaux et des nombres rationnels d'une façon générale
- Comparer des fractions, des nombres décimaux et des nombres entiers.

Apprendre aux élèves à reconnaître et utiliser des structures mathématiques

Accorder de l'attention aux structures mathématiques sous-jacentes permet aux élèves de faire des connexions entre les problèmes, les stratégies de résolution et les représentations qui peuvent, à priori, apparaître comme étant différents, mais qui sont en fait mathématiquement équivalents. Les enseignants devraient encourager les élèves à adopter un langage qui reflète les structures mathématiques, par exemple en reprenant avec des termes mathématiques appropriés les phrases des élèves qui comportent des termes vagues et/ou qui emploient un langage non mathématique. Voici quelques exemples d'actions visant à encourager les élèves à reconnaître les concepts mathématiques :

- Encourager les élèves à lire les expressions numériques et algébriques comme des descriptions d'équivalences, plutôt que simplement des instructions visant à effectuer un calcul (par exemple, les élèves considèrent souvent le signe égal comme une instruction signifiant qu'un calcul doit être effectué plutôt que comme une indication d'équivalence (24), et concevoir une expression numérique comme une équivalence revient à penser que « $17 \times 25 = 10 \times 25 + 7 \times 25$ » c'est dire que « 17×25 est la même chose que $10 \times 25 + 7 \times 25$ »).
- Rendre les élèves capables de comprendre les relations inverses entre addition et soustraction ; multiplication et division (25).

Résumé des preuves

- L'examen des preuves a repéré deux méta-analyses pertinentes concernant l'enseignement de l'algèbre. Cependant, les conclusions de ces méta-analyses concernent l'enseignement d'un point de vue global et ne donnent pas d'éléments probants sur des approches d'enseignement spécifiques.
- Quatre synthèses systématiques du What Works Clearinghouse fournissent des preuves qui soutiennent des approches d'enseignement spécifiques dans le domaine numérique et algébrique. Le niveau de preuve est élevé quand il concerne la fluence, l'incitation à choisir délibérément des stratégies et l'utilisation de la droite numérique pour représenter des fractions et des nombres décimaux.
- L'examen des preuves a repéré 4 méta-analyses qui se sont intéressées à l'utilisation de la calculatrice. Le niveau de preuve associé à leurs résultats est élevé.

5. Motivation

Développer l'autonomie et la motivation des élèves

Les enseignants devraient encourager leurs élèves à prendre des responsabilités et à jouer un rôle actif dans leur propre apprentissage (26). Cela implique que les élèves développent leurs compétences métacognitives (leur capacité à planifier, surveiller et évaluer de façon autonome leur raisonnement et leur apprentissage) et leur motivation à apprendre les mathématiques.

Développer les capacités métacognitives des élèves à partir d'une réflexion structurée sur leur apprentissage

Développer les capacités métacognitives des élèves peut les aider à devenir des mathématiciens plus efficaces et plus autonomes. Cette capacité est souvent conçue comme la capacité des élèves à penser à leur propre pensée et à leur propre apprentissage. Les élèves qui ont acquis cette capacité vont, par exemple :

- examiner leurs connaissances actuelles pour sélectionner une approche particulière dans le but de résoudre un exercice mathématique
- analyser l'efficacité de cette approche
- changer d'approche ou poursuivre au contraire sur cette voie de manière délibérée en se basant sur les étapes précédentes.

L'objectif final est de rendre les élèves capables de mener ses étapes de façon systématique et autonome, sans avoir besoin du soutien de l'enseignant ni de leurs pairs. Cependant, ces compétences sont complexes et requièrent au début un enseignement et un soutien spécifiques. Les enseignants devraient modéliser ces processus métacognitifs (voir l'exemple de l'encadré F) en explicitant leur propre pensée ou en posant des questions à leurs élèves quand ils cherchent à résoudre un exercice (27). Des exemples résolus peuvent être utilement exploitées par l'enseignant pour rendre sa pensée explicite (28). Les enseignants doivent progressivement élever leur niveau d'exigence en ce qui concerne l'autonomie des élèves à mesure que ceux-ci gagnent en compétence et en fluence. Les enseignants devraient régulièrement proposer à leurs élèves des opportunités leur permettant de développer leurs capacités métacognitives de façon indépendante en les encourageant à :

- pratiquer l'auto-explication – les élèves s'expliquent à eux-mêmes comment ils ont planifié, surveillé et évalué l'accomplissement d'un exercice
- expliquer leurs stratégies métacognitives à l'enseignant comme à d'autres élèves (29).

Développer les capacités métacognitives n'est pas évident et plusieurs défis doivent être relevés :

- Les enseignants doivent veiller à ce que les capacités métacognitives des élèves ne les distraient pas de la tâche mathématique elle-même (30). Cela risque d'arriver quand on attend des élèves qu'ils en fassent trop, trop vite, sans soutien efficace de leur enseignant.
- Quelque que soit la stratégie enseignée, les élèves ont besoin de temps pour imiter l'enseignant comme pour intérioriser et appliquer de façon autonome ces stratégies. Cela suppose que ces stratégies soient utilisées de façon répétée pendant plusieurs séances de mathématiques (31). Il est possible que le temps nécessaire pour développer les capacités métacognitives soit plus important que pour d'autres compétences et connaissances.
- La discussion et le dialogue peuvent être des outils efficaces pour développer la métacognition, mais les élèves ont besoin d'apprendre comment s'engager dans une discussion productive (32). Les enseignants devraient modéliser les discussions efficaces et apprendre aux élèves ce qu'ils doivent faire en tant qu'auditeur (33). Orchestrer des discussions productives requiert de nombreuses compétences et peut exiger des formations professionnelles ciblées.

Renforcer la motivation des élèves pour qu'ils s'engagent à apprendre et à faire des mathématiques sur le long terme

Le développement d'une attitude positive et d'une motivation réelle est, bien évidemment, en lui-même, un objectif important de l'enseignement. Mais ce développement concourt également à renforcer les capacités métacognitives, car ces dernières exigent de la part des élèves des efforts constants et délibérés, et par-là même une motivation soutenue sur une longue période de temps. La motivation peut être influencée chez les élèves par de multiples facteurs, comme leur intérêt ou désintérêt pour les mathématiques, les idées qu'ils se font de leur niveau (bon ou mauvais) en mathématiques, et leur perception de l'utilité, ou non, des mathématiques (34). Malheureusement, de nombreux élèves ont une vision négative des mathématiques, et cette vision tend à se dégrader au fil du temps. Une étude récente a montré que la proportion des élèves qui reconnaissent ne pas aimer les mathématiques passe de 17% au CM1 à 48% en 4^{ème} (35).

Cependant, même si l'attitude joue un rôle important, identifier les approches efficaces qui permettraient de la faire évoluer favorablement, reste difficile et ne repose pas sur des preuves solides. Il semblerait que l'expression d'une attitude positive vis-à-vis des mathématiques par tous les personnels d'un établissement soit un élément déterminant. Les chefs d'établissements devraient s'assurer que tout le personnel, y compris le personnel non-enseignant, soutienne la motivation, la confiance et le plaisir chez tous les élèves et particulièrement en ce qui concerne les mathématiques.

Les enseignants devraient engager les parents à valoriser les mathématiques auprès de leurs enfants pour renforcer chez ces derniers leur confiance dans ce domaine (36). Cependant, les enseignants devraient rester prudents quand ils encouragent les parents à soutenir l'apprentissage de leurs enfants en mathématiques, par exemple en les aidant pour leurs devoirs, car les interventions qui ont mis en œuvre ce type d'action n'ont souvent pas conduit à une amélioration des résultats (37).

Encadré F : modéliser les processus métacognitifs durant la résolution de problème

En expliquant aux élèves comment résoudre un problème donné, l'enseignant devrait leur montrer comment il planifie, surveille et évalue ses pensées en (se) posant à voix haute une série de questions. Elles peuvent être par exemple :

- Quelle est la question posée par le problème ?
- Est-ce que j'ai déjà rencontré un problème de ce type ? Quelles méthodes de résolution ai-je déjà essayé et étaient-elles efficaces ?
- Est-ce que je peux représenter ce problème à l'aide d'un diagramme ou d'un graphique ?
- Est-ce que ma réponse fait sens quand je relis le problème ?
- Ai-je besoin de plus d'informations ou d'aide pour résoudre ce problème ? Où puis-je les trouver ?

Encadré G : l'anxiété en mathématiques

L'anxiété en mathématiques est un type particulier d'anxiété qui interfère spécifiquement avec les mathématiques, et ce n'est donc pas la même chose que l'anxiété générale. Elle peut avoir un impact important au détriment de l'apprentissage des élèves en surchargeant leur mémoire de travail et en causant un évitement des mathématiques. L'anxiété en mathématiques tend à augmenter avec l'âge, mais elle apparaît parfois déjà à l'école maternelle (38). Malheureusement, même si quelques recherches prometteuses ont été menées, on ne sait toujours pas bien comment faire pour la réduire (39). Prendre conscience du problème, et être capable de la repérer, est le premier pas. Les enseignants devraient identifier les élèves développant des attitudes d'évitement ou montrant des signes d'anxiété (être tétanisé, transpirer, s'agiter) quand ils font des mathématiques, et exploiter leur connaissance des élèves et leur jugement professionnel pour encourager ces derniers à surmonter leur anxiété.

Résumé des preuves

- L'examen des preuves a repéré six méta-analyses pertinentes concernant des approches ciblées sur la métacognition et /ou l'auto-régulation dont le niveau de preuve est modéré.

- Cette recommandation se base également sur un examen des preuves conduit pour le futur guide EEF portant sur la métacognition et l'auto-régulation.
- L'examen des preuves a identifié une méta-analyse pertinente qui soutient l'utilisation d'exemples résolus avec un faible niveau de preuve.

6. Exercices et ressources pédagogiques

Exploiter des exercices et des ressources pédagogiques pour stimuler les élèves et leur permettre d'améliorer leurs compétences mathématiques

Le choix des exercices est un élément crucial de l'enseignement des mathématiques car les exercices utilisés en classe définissent largement ce qu'il s'y passe. Cependant, les preuves montrent que le choix d'un exercice (ou d'une ressource) parmi d'autres, importe moins que la manière dont les enseignants prévoient de l'exploiter en classe (40). Les exercices et les ressources sont des outils qui doivent être mis en œuvre de manière efficace pour avoir un impact positif sur l'apprentissage.

Exploiter de manière efficace les exercices et les ressources exige un niveau de compétence considérable et de nombreux enseignants vont avoir besoin d'un soutien spécifique pour y parvenir. Les directeurs d'établissement devraient en faire une priorité pour la formation professionnelle.

Exploiter les exercices efficacement

A quoi ressemble la mise en œuvre efficace d'un exercice ? Quelques éléments de réponse sont proposés ci-dessous en s'appuyant sur des exemples d'exercices.

De nombreuses sources permettent de trouver des exercices pertinents. Ces exercices demandent souvent à être préparés et adaptés pour servir des objectifs précis. Il est probable que de nombreux exercices, y compris ceux qui semblent apparemment n'être que de simples exercices de routine, peuvent être utilisés par un enseignant compétent pour soutenir efficacement l'apprentissage de ses élèves.

Exploiter les ressources pédagogiques efficacement

Il est peu probable qu'une ressource pédagogique, comme un manuel ou un logiciel informatique, ait, à elle seule, un impact positif sur l'enseignement ou l'apprentissage. Les ressources doivent soutenir, ou pour le moins être accompagnées par, une amélioration de la qualité de l'enseignement pour faire une véritable différence.

Les outils technologiques sont des ressources qui semblent très prometteuses pour favoriser l'enseignement des mathématiques, mais la preuve de leur impact en classe n'a pas toujours été au rendez-vous. Une grande variété de logiciels et d'outils technologiques sont utilisés en classe de mathématiques, comme les téléphones mobiles, des logiciels de géométrie dynamique, des logiciels permettant d'explorer son environnement et des jeux éducatifs. Quelle que soit la technologie utilisée, des éléments probants suggèrent un ensemble de principes de base qui devraient permettre leur utilisation efficace. Des conseils détaillés

peuvent être trouvés dans l'examen des preuves EEF *Digital Technology Literature Review* disponible en ligne. Voici trois considérations clés (41) :

1. **Identifier clairement le rôle joué par l'outil technologique dans l'apprentissage des élèves.** Se poser des questions comme : quelles stratégies d'enseignement et quels exercices seraient utiles aux élèves pour qu'ils explorent les relations entre les équations et les représentations graphiques en utilisant un logiciel de géométrie dynamique ? Les tableurs vont-ils permettre aux élèves de comprendre et transformer des données plus efficacement ? Comment les exercices peuvent-ils être conçus pour exploiter le potentiel d'un logiciel au profit d'une rétroaction efficace auprès des élèves ?
2. La formation des enseignants ne devrait pas s'intéresser uniquement aux compétences technologiques requises pour l'utilisation de nouveaux équipements. **Une formation professionnelle sur la manière dont les outils technologiques doivent être utilisés pour mettre en œuvre un enseignement efficace** est probablement indispensable pour faire la différence.

Avant d'adopter un outil technologique, **considérer son coût potentiel sans oublier l'impact sur la charge de travail des enseignants.** Tout ces coûts additionnés peuvent être plus importants que les coûts d'autres approches tout aussi efficaces et qui n'impliquent pas l'utilisation d'outils technologiques.

Exploiter l'évaluation des forces et des faiblesses des élèves pour choisir et bâtir un exercice

Un enseignant demande aux élèves parmi les équations ci-dessous d'identifier celles dont la représentation graphique est une droite passant par le point de coordonnées (1,2).

$$x = 15$$

$$x = 3 + y$$

$$x = y - 1$$

$$y = 2x^2$$

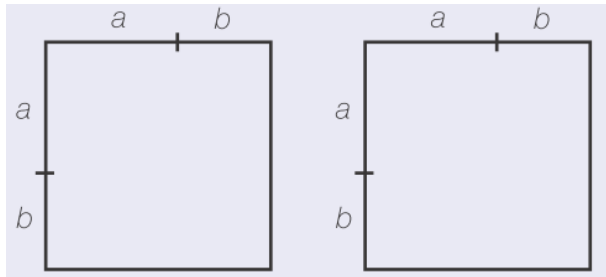
Certains élèves ont cherché les équations qui admettent $x = 1$ et $y = 2$ comme solutions, mais n'ont pas vérifié si ces équations sont celles de droites. Certains ont écarté toutes les équations qui n'étaient pas écrites sous la forme $y = mx + c$. Cela a permis à l'enseignant d'identifier ce que les élèves savent et ne savent pas à propos des équations de droites.

Après avoir discuté des solutions et utilisé un tableur grapheur pour montrer les différentes représentations graphiques, l'enseignant demande aux élèves de créer des exemples et des contre-exemples pour des droites passant par le point de coordonnées (2, -3). Maintenant les élèves produisent des exemples corrects écrit de plusieurs façons sous la forme $3x + 2y = 0$, et leurs contre-exemples inclues des droites qui ne passent pas par le point (2, -3) et aussi des représentations graphiques qui ne sont pas des droites.

Exploiter certains exercices pour s'intéresser aux idées fausses

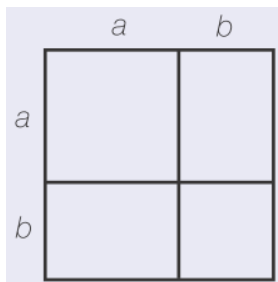
L'enseignante a remarqué que certains élèves pensent que $a^2 + b^2 = (a + b)^2$

Elle trace au tableau deux figures identiques.



Elle demande aux élèves de représenter sur la première $a^2 + b^2$ et sur la seconde $(a + b)^2$.

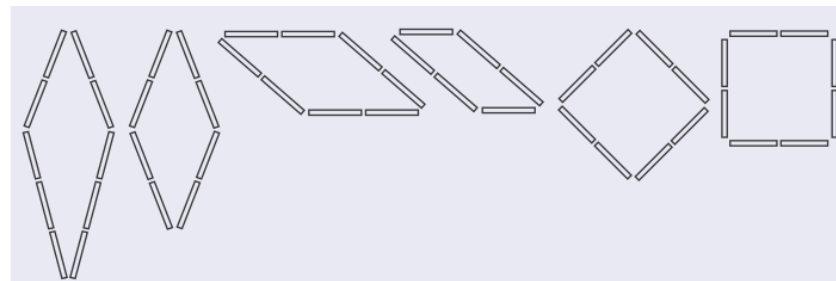
En ajoutant deux lignes supplémentaires, comme ci-dessous, les élèves peuvent constater que, pour tous nombres a et b , on a $a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$



Donner des exemples et des contre-exemples pour définir un concept

Une enseignante demande aux élèves de lui donner leurs définitions d'un losange, qu'elle note au fur et à mesure au tableau.

Elle montre ensuite les 6 figures ci-dessous, chacune à son tour et une seule à la fois, et demande aux élèves pour chacune d'entre elles de lever le doigt s'ils pensent que c'est un losange.



Elle écrit sous chacune des figures le nombre de votes.

Elle dit ensuite à la classe que la première figure n'est pas un losange, mais que la seconde en est un. Elle redemande aux élèves de voter pour les figures suivantes, et note à nouveau les nombres de votes sous chaque figure.

Elle donne maintenant les réponses pour la troisième et quatrième figure, et redemande aux élèves de voter pour les deux dernières figures, et note à nouveau les nombres de votes sous chaque figure.

Elle donne enfin les réponses pour les dernières figures et demande à nouveau aux élèves de donner leurs définitions d'un losange, qui sont discutées par la classe.

Ici, les exemples et contre-exemples étaient soigneusement choisis, à la fois dans leur forme et dans leur orientation, dans le but de souligner certaines idées fausses, comme par exemple qu'un carré n'est pas un losange.

Discuter et comparer plusieurs méthodes de calcul

Un enseignant demande aux élèves de produire plusieurs solutions pour calculer 5×18 .

Voilà certaines de leurs solutions :

« *Je peux multiplier 5 par 20 puis enlever le double de 5 :*

$$5 \times 18 = 5 \times 20 - 5 \times 2 = 100 - 10 = 90 \text{ »}$$

« *Pour multiplier par 5, c'est facile, je multiplie par 10 et ensuite je divise le produit par 2 :*

$$10 \times 18 = 180 ; 180 : 2 = 90 \text{ »}$$

« *18, c'est 2×9 , donc je multiplie 9 par 5 puis je multiplie la réponse par 2 :*

$$5 \times 9 = 45 \text{ et } 45 \times 2 = 90 \text{ »}$$

Une discussion avec les élèves leur permet de comparer ces méthodes, d'évaluer leur difficulté relative ainsi que leur efficacité pour mener un calcul mental. L'enseignant pose alors la même question avec 15×12 .

Exploiter des exercices pour construire conjointement la connaissance d'un concept et la connaissance d'une procédure

Une enseignante demande de calculer le produit 34×52 en posant l'opération.

L'enseignante demande alors de déplacer les chiffres, de façon à produire une nouvelle multiplication de deux nombres à deux chiffres, par exemple 53×24 . Elle demande finalement de trouver la solution de manière à obtenir le produit le plus grand.

Cet exercice donne aux élèves l'opportunité de revoir la multiplication posée (connaissance procédurale) et en même temps de développer leur compétence conceptuelle concernant les valeurs de position.

Exploiter des problèmes verbaux pour permettre aux élèves de comprendre les mathématiques

Un enseignant propose à des élèves l'exercice suivant :

« 1 127 divisé par 23 est égal à 49. Quel est le nombre qui, divisé par 24, donne 49 ? »

Certains élèves remarquent que 24 est égal à 23 plus une unité, et donne comme réponse 1128.

D'autres procèdent par essais et améliorations.

D'autres calculs 24×49 , qui donne le bon résultat, mais tout le monde ne comprend pas pourquoi.

Pour permettre d'entrer plus facilement dans la structure de cet exercice, l'enseignant lit l'énoncé ci-dessous :

« Une classe de 23 élèves gagne 1 127 € pour avoir nettoyé la plage. Ils partagent l'argent de façon équitable, et trouvent que chaque élève va gagner 49 € ».

Ensuite l'enseignant demande « comment exploiter cet énoncé pour nous permettre de répondre à la question ? ».

Les élèves réalisent qu'ils doivent poser une question du type : « combien d'argent une classe de 24 élèves doit gagner pour que chaque élève ait 49 € ? »

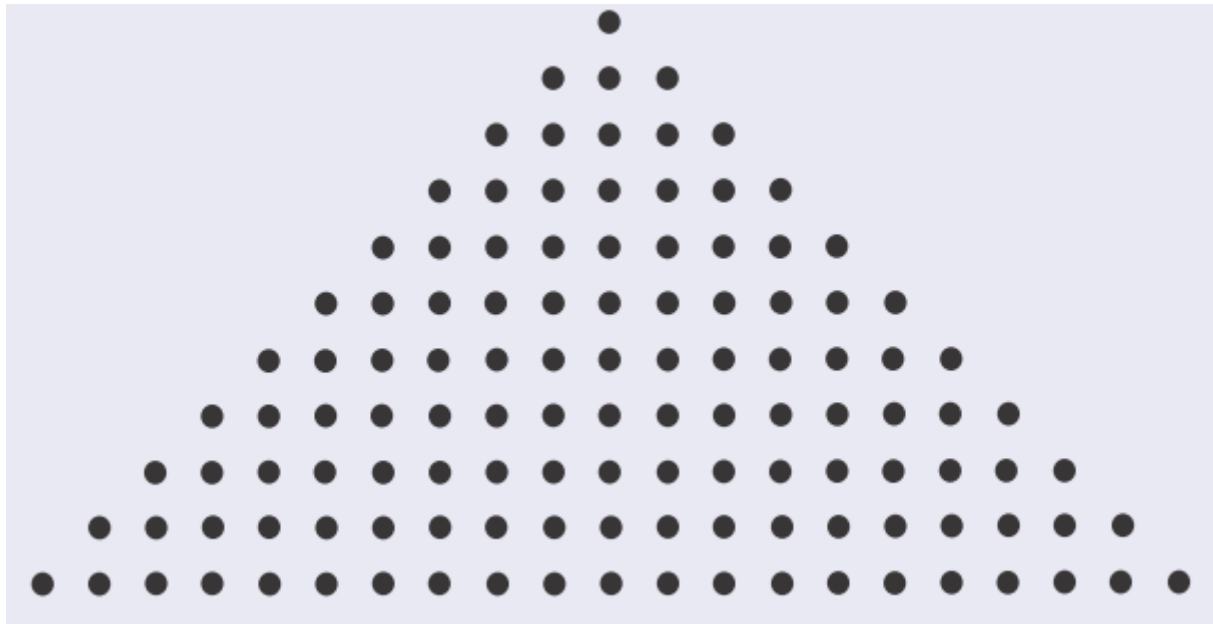
Dans ce contexte, les élèves trouvent plus facilement qu'il faudrait rajouter 49 euros pour le 24^{ème} élève, ce qui veut dire que la réponse est $1\ 127 + 49 = 1\ 176$. Ici le contexte a contribué à éclairer la structure mathématique.

Créer des opportunités pour que les élèves recherchent les structures mathématiques et les généralisent

Une enseignante utilise les figures ci-dessous pour montrer comment un triangle de points avec une base de 5 points peut être modifié de façon à obtenir un carré de 3 points de côté et de surface 3×3 , simplement en changeant de place 3 points.



Ensuite, elle demande aux élèves comment ils pourraient calculer (et non compter) le nombre de points dans un triangle de points ayant comme base 21 points.



Certains élèves se contentent de compter le nombre de points.

Certains pensent à transformer le triangle en un carré de 19 points, car $3 = 5 - 2$ et $19 = 21 - 2$.

D'autres remarques que les points pourraient être réarrangés en un carré de 11 points de côté et de surface 11×11 (ou plus généralement une surface égale à $(n + 1) \times (n + 1)$ pour un carré de base $2n + 1$ points).

Ces triangles de points ont été utilisés par l'enseignant pour permettre aux élèves de remarquer que la somme de nombres impairs consécutifs est le carré d'un nombre.

Résumé des preuves

- L'examen des preuves n'a pas été en mesure d'identifier des méta-analyses sur l'utilisation des exercices, bien qu'il existe une abondante littérature sur l'utilisation et la conception des exercices. Une étude solide et à grande échelle a indiqué que les connaissances des enseignants sont essentielles pour exploiter le potentiel d'un exercice et favoriser les apprentissages.
- L'examen a identifié deux méta-analyses pertinentes concernant l'impact de l'utilisation de différents manuels scolaires. Les résultats montrent que choisir tel manuel plutôt que tel autre a au mieux un effet faible sur les apprentissages, et le niveau de preuve associé à cet effet est modéré.
- L'examen a identifié 11 méta-analyses concernant l'utilisation d'outils technologiques et le niveau de preuve associé à leurs conclusions est limité.

7. Interventions structurées

Mettre en œuvre des interventions pour proposer un soutien supplémentaire

Les établissements devraient avoir comme objectif de mettre en œuvre un enseignement efficace en classe entière de manière à soutenir tous les élèves de cette classe. Par conséquent, le besoin de mettre en place des séances de soutien devrait diminuer. Cependant, certaines interventions structurées et de bonne qualité peuvent tout de même rester indispensables à certains élèves pour qu'ils puissent progresser. La sélection des interventions devrait être pilotée par l'évaluation efficaces des points faibles et des points forts de l'élève.

La façon la plus simple de sélectionner des interventions de haute qualité est de chercher parmi celles qui ont été rigoureusement évaluées et qui ont montré avoir un impact positif sur les résultats des élèves³. Cependant, peu d'interventions en mathématiques ont été évaluées, et une intervention rigoureusement évaluée et efficace ne sera peut-être pas disponible. Le EEF a rendu ces évaluations prioritaires. En attendant, les établissements peuvent souhaiter adopter et mettre en œuvre une intervention en considérant les caractéristiques communes aux interventions efficaces suivantes (42) :

- Les interventions **doivent être mises en place précocement**, à la fois parce que les difficultés en mathématiques peuvent impacter les performances dans d'autres domaines, mais aussi pour empêcher que les élèves ne développent une vision négative des mathématiques, voire même de l'anxiété.
- Les interventions devraient être conçues en se basant sur **les preuves concernant l'enseignement efficace et la construction des capacités mathématiques**. Comment l'intervention adopte-t-elle les recommandations de ce guide ?
- Les interventions devraient assurer un **enseignement explicite systématique**. Cela implique de proposer aux élèves des modèles de résolutions efficaces de problèmes, de verbaliser les processus de raisonnement et de mettre en œuvre des pratiques guidées, des rétroactions correctives et des révisions fréquentes et cumulatives (43).
- Une mise en œuvre efficace est indispensable. **Les interventions doivent être soigneusement planifiées et nécessitent l'exploitation de certaines ressources de l'établissement, y compris du personnel**. L'intervention la mieux pensée qui soit ne donnera rien si le personnel enseignant n'est pas disponible, ou surchargé, ou mal formé pour mettre en place l'intervention. Le guide EEF *Making Best Use of Teaching Assistant* donne des conseils sur le déploiement efficace des Assistants d'Éducation (*Teaching Assistant*).

³ Les évaluations de ces interventions peuvent être trouvées dans l'examen des preuves EEF sur les programmes mathématiques prochainement disponible, dans l'onglet présentant les projets sur le site internet EEF ou dans la base de données *Evidence 4 impact database* de l'Institute for Effective Education.

- Assurer que les **liens existent entre l'enseignement en classe entière et l'intervention**. Les interventions sont parfois complètement déconnectées des activités menées en classe entière. Il est indispensable que les apprentissages ciblés par les interventions soient en lien avec le travail fait en classe (et même aillent au-delà) et que les élèves soient conscients de ce lien. On ne devrait pas considérer que les élèves sont capables d'identifier et de donner du sens à ces liens de leur propre initiative.
- **L'intervention devrait être motivante pour les élèves** et prévenir ou contrecarrer l'association parfois faite entre les mathématiques et l'ennui ou même l'anxiété. L'exploitation de certains jeux, par exemple, est une caractéristique récurrente des interventions prometteuses, en particulier à l'école primaire.
- **Porter une grande attention à ce que les élèves pourraient manquer du fait de leur participation à l'intervention**. Vont-ils manquer des activités qui leur font plaisir ? Vont-ils manquer l'opportunité d'apprendre un contenu qui fait parti des programmes ? Est-ce qu'un enseignement en classe entière serait préférable ? Il est indispensable que l'intervention soit plus efficace que l'enseignement que les élèves auraient sinon reçu ; si ce n'est pas le cas, les élèves du groupe intervention vont prendre encore plus de retard par rapport à leurs pairs.
- Il est important d'éviter la **fatigue due à l'intervention**, aussi bien du point de vue de l'élève que de celui de l'enseignant. Les interventions n'ont pas besoin d'être longues ni intensives pour être efficaces.

Encadré H : les difficultés d'apprentissage spécifiques aux mathématiques

Des discussions sont toujours d'actualité qui posent la question de savoir s'il existe un trouble spécifique qui pourrait être dénommé « dyscalculie » ou s'il conviendrait de le considérer comme le niveau inférieur d'un continuum de capacités mathématiques, ou encore s'il concerne exclusivement que les élèves qui sont en difficulté en mathématiques (et non dans les autres domaines du savoir académique). On ne sait toujours pas si les enfants qui ont des difficultés sévères ou spécifiques aux mathématiques ont besoin d'interventions fondamentalement différentes des autres (44). Si les élèves sont réellement en difficulté en mathématiques, la réponse la plus efficace est d'avoir une bonne connaissance de leur points forts et de leurs points faibles et d'organiser le soutien en conséquence (voir la recommandation 1).

Résumé des preuves

Les conseils de ce chapitre sont fondés sur un examen des preuves portant sur les interventions en mathématiques, mené par Ann Dowker et financé par EEF.

8. Transition école-primaire / collège

Faciliter la transition des élèves de l'école primaire au collège

En Angleterre, une forte dégradation des résultats mathématiques comme dans les attitudes vis-à-vis des mathématiques est observée quand les élèves, quittant l'école primaire, arrivent au collège. Par exemple, une grande étude nationale sur les résultats en primaire montre que, à la fin de la sixième – soit une année entière après la transition vers le secondaire– les performances des élèves à un test numérique du niveau de l'école primaire sont en-dessous de leurs performances mesurées à la fin du CM2 (45).

Il est évident que les établissements devraient s'intéresser au soutien qu'il convient d'apporter aux élèves pour leur permettre de vivre une transition optimale. Malheureusement, peu d'éléments probants sont à verser au crédit d'interventions particulières qui auraient comme objectif de contrer cette forte dégradation. Cependant, des preuves issues d'une recherche plus large suggèrent de considérer les questions suivantes :

- **Les écoles primaires et les collèges développent-ils une compréhension commune des programmes, de l'enseignement et des apprentissages ?** Professeurs des écoles et professeurs de collèges pourraient tous être plus efficaces s'ils étaient familiers des programmes et des méthodes d'enseignement en mathématiques des uns et des autres.
- **Comment les écoles primaires s'assurent-elles que leurs élèves partent en ayant des connaissances et des compétences en mathématiques sécurisantes ?** Les écoles primaires devraient chercher à développer chez les élèves les capacités indispensables leur permettant de surmonter les problèmes associés au passage au collège.
- **Quand les élèves arrivent en 6^{ème}, les enseignants du secondaire ont-ils une bonne compréhension de leurs points faibles et de leurs points forts (voir recommandation 1) ?** Utilisent-ils cette information pour fonder leur enseignement sur des éléments clés du programme de mathématiques de l'école primaire d'une manière engageante, pertinente en évitant les répétitions inutiles ?
- **Comment les collèges organisent-ils des séances de soutien structurées destinées aux élèves de 6^{ème} qui sont en difficulté en mathématiques, afin qu'ils puissent progresser (voir la recommandation 7) ?**
- **Comment les élèves sont-ils répartis dans les classes de mathématiques quand ils entrent en 6^{ème} ?** Des résultats probants de la recherche suggèrent que l'affectation des élèves dans des classes de mathématiques basée sur leurs résultats antérieurs (souvent appelé « regroupement (*setting*) » ou « groupes de niveau ») n'a pas conduit, en moyenne, à une augmentation du niveau global et pourrait même augmenter la dispersion des résultats scolaires. Ce regroupement a un impact légèrement négatif

pour les élèves des classes de faible niveau, alors que les élèves des classes de niveau supérieur semblent en profiter légèrement. Les élèves de groupes sociaux désavantagés sont plus souvent affectés dans les classes de faible niveau, ce qui explique que le regroupement des élèves pourrait augmenter l'écart entre les résultats des élèves socialement désavantagés et ceux de leurs pairs (46).

Résumé des preuves

Peu d'éléments probants sont à verser au crédit d'interventions particulières se préoccupant spécifiquement de cette transition. Cette recommandation a considéré les preuves concernant plus largement l'enseignement efficace et les a appliqués à ce problème spécifique que pose la transition. De nombreuses méta-analyses portant sur les regroupements des élèves par niveau suggèrent de façon constante que cela augmente les écarts entre les groupes de niveaux différents.

Comment ce guide d'orientation a-t-il été élaboré ?

Ce guide se fonde sur les meilleures preuves disponibles à ce jour concernant l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège. La principale source d'éléments probants a été l'examen des preuves mené sur l'enseignement efficace des mathématiques conduit par le professeur Jeremy Hodgen, le docteur Colin Foster, la docteure Rachel Marks et la professeure Margaret Brown. Trois étapes ont été suivies pour l'élaboration de ce guide :

1. **Définition des objectifs.** Le processus a débuté par la consultation d'enseignants, d'universitaires et d'autres personnes ressources. L'équipe en charge de ce projet au sein de l'EEF a ainsi pu circonscrire les niveaux scolaires qui semblaient les plus intéressants (l'école primaire et le collège), nommé un comité consultatif ainsi qu'une équipe de chercheurs chargée de mener un examen des preuves. Le comité consultatif était constitué d'enseignants expérimentés et d'universitaires.
2. **Examen des preuves.** L'objectif de l'équipe de chercheurs qui a conduit cet examen était de présenter les meilleures preuves disponibles à un niveau international sur le sujet défini auparavant. Quand cela était possible, l'examen des preuves a utilisé les résultats de méta-analyses ou d'examens systématiques.
3. **Rédaction des recommandations.** Education Endowment Foundation a ensuite, avec l'appui du comité consultatif, rédigé ce rapport d'orientation. Des universitaires et des experts de l'enseignement ont été consultés tout au long de ce processus.

Nous souhaitons remercier les nombreux chercheurs et praticiens qui ont soutenu ce travail et apporté leurs commentaires tout au long de la rédaction de ce guide d'orientation.

Glossaire

Compléments (*number bonds*)

Paire de nombres dont l'addition conduit à une somme particulière, par exemple les compléments à dix sont toutes les paires de nombres entiers dont le total est égal à 10 (49).

Contre-exemple (*non-exemple*)

Exemple qui ne suit pas une règle énoncée ; utilisé également pour montrer qu'une proposition est fausse.

Examen des preuves (*systematic review*)

Synthèse des résultats de la recherche sur un sujet particulier, qui utilise des critères stricts pour n'inclure que les études qui répondent à certaines exigences méthodologiques. Les examens des preuves qui fournissent une estimation quantitative de l'effet d'un traitement sont des méta-analyses.

Fraction mixte (*mixed fraction*)

Nombre entier additionné à une partie fractionnaire inférieure à l'unité. Exemple : $1\frac{1}{2}$ est une fraction mixte (48).

Grandeur composée quotient (*rate*)

Comparaison de deux quantités liées sous la forme d'un rapport. Par exemple, la vitesse est la comparaison de la distance parcourue par rapport au temps (51).

Intervention (*interventions*)

Enseignement ciblé s'adressant aux élèves en difficulté, en général sous la forme d'un soutien en petits groupes.

Méta-analyse (*meta-analysis*)

Type particulier d'examen des preuves systématique qui se concentre sur les preuves quantitatives de différentes études et les combine statistiquement pour rechercher une conclusion plus fiable ou plus solide que celle pouvant être tirée d'études distinctes.

Multiple (*multiple*)

Pour tout nombre entier a et b , a est un multiple de b s'il existe un troisième entier c de sorte que $a = bc$. Par exemple, 14, 49 et 70 sont tous des multiples de 7 car $14 = 7 \times 2$, $49 = 7 \times 7$ et $70 = 7 \times 10$.

Proportion (*proportion*)

1. Comparaison d'une partie à un tout. Exemple : si 20 € sont partagés entre deux personnes dans le rapport 3 : 5, la première reçoit 7,50 € soit $\frac{3}{8}$ de l'ensemble des 20 €. C'est la proportion du tout.
2. Si deux variables x et y sont liées par une équation de la forme $y = kx$, alors y est proportionnelle à x . Lorsque y est tracé en fonction de x , on obtient une droite passant par l'origine.
3. Si deux variables x et y sont liées par une équation de la forme $xy = k$, ou de manière équivalente $y = k/x$, où k est une constante et $x \neq 0$, $y \neq 0$, elles varient en proportion inverse l'une de l'autre (50).

Ratio (*ratio*)

Une comparaison de partie à partie. Le ratio de a sur b s'écrit généralement $a : b$. Par exemple, dans une recette de cuisine, la matière grasse et la farine sont mélangées dans le ratio 1 : 2 ce qui signifie que le poids de la matière grasse utilisée est égal à la moitié de la masse de la farine, c'est-à-dire poids de matière grasse/poids de farine = $\frac{1}{2}$. Les ratios sont équivalents à des fractions (52).

Représentations concrètes (*manipulatives*)

Objet physique que les élèves ou les enseignants peuvent toucher et déplacer, utilisés pour soutenir l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Par exemple les réglettes Cuisenaire et les blocs Dienes sont des représentations concrètes couramment utilisées.

Représentations semi-concrètes (*representations*)

Une représentation semi-concrète représente un fait, un concept, un problème mathématique (53). Exemples de différentes représentations semi-concrètes :

- deux fractions peuvent être représentées sur une droite numérique ;
- une fonction quadratique peut être exprimée algébriquement ou présentée visuellement par sa représentation graphique
- une distribution de probabilité peut être présentée à l'aide d'un tableau ou par un histogramme.

Références

1. Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.;Coe, R., Aloisi, C., Higgins, S., & Major, L. E. (2014). What makes great teaching? Review of the underpinning research. London: The Sutton Trust;
Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T.,Jordan, A., Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Educational Research Journal*,47(1), 133-180. doi:10.3102/0002831209345157
2. Dowker, A. (forthcoming). Review of Mathematics Education Programmes. London: The Education Endowment Foundation.
3. Higgins, S., Katsipataki, M., Coleman, R., Henderson, P.,Major, L.E., Coe, R. & Mason, D. (2018). The Sutton Trust-Education Endowment Foundation Teaching and Learning Toolkit. London: Education Endowment Foundation.
4. Elliott, V. et al (2016). A marked improvement? A review of the evidence on written marking. London: Education Endowment Foundation.
5. Smith III, J. P., diSessa, A. A., & Roschelle, J. (1994). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences*, 3(2), 115-163.
6. Ibid.
7. Hansen, A. (Ed.) (2017). Children's Errors in Mathematics (4th ed.). London: Sage.
Ryan, J., & Williams, J. (2007). Children's mathematics 4-15: Learning from errors and misconceptions. McGraw-Hill Education.
- Hart, K. M., Brown, M. L., Kuchemann, D. E., Kerslake, D., Ruddock, G., & McCartney, M. (1981). Children's understanding of mathematics: 11-16. London: John Murray.
8. Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 380.
9. NCETM curriculum glossary
<https://www.ncetm.org.uk/public/files/17308038/National+Curriculum+Glossary.pdf>
10. Carbonneau, K. J. et al. (2013).
11. Nunes, T. et al. (2009).
12. Carbonneau, K. J. et al. (2013).
13. Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, 16(3), 183-198. doi: 10.1016/j.learninstruc.2006.03.001
14. Ainsworth, S. (2006).
15. Woodward, J., Beckmann, S., Driscoll, M., Franke, M., Herzig, P., Jitendra, A., Koedinger, K. R., & Ogbuehi, P. (2012). Improving mathematical problem solving in grades 4 through 8 : A practice guide (NCEE 2012-4055). Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance,

Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. Retrieved from http://ies.ed.gov/ncee/wwc/publications_reviews.

16. Gersten, R. et al (2009). Assisting students struggling with mathematics: Response to Intervention (RtI) for elementary and middle schools (NCEE 2009-4060). Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. Retrieved from <http://ies.ed.gov/ncee/wwc/publications/practiceguides/>

17. Siegler, R. et al (2010). Developing effective fractions instruction for kindergarten through 8th grade: A practice guide (NCEE #2010-4039). Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. Retrieved from whatworks.ed.gov/publications/practiceguides

18. Brown, J. S., & Van Lehan, K. (1982). Towards a generative theory of 'bugs'. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

19. Ellington, A. J. (2003). A meta-analysis of the effects of calculators on students' achievement and attitude levels in precollege mathematics classes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 433-463.; Hembree, R., & Dessart, D. J. (1986). Effects of hand-held calculators in precollege mathematics education: A meta-analysis. *Journal for research in mathematics education*, 17(2), 83-99.

20. Ruthven, K. (1998). The Use of Mental, Written and Calculator Strategies of Numerical Computation by Upper Primary Pupils within a 'Calculator-Aware' Number Curriculum. *British Educational Research Journal*, 24(1), 21-42.

21. Siegler et al. (2010).

22. Ibid.

23. Nunes, T., Bryant, P., & Watson, A. (2009). *Key understandings in mathematics learning*. London: Nuffield Foundation.

24. Jones, I., & Pratt, D. (2012). A Substituting Meaning for the Equals Sign in Arithmetic Notating Tasks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(1), 2-33.

25. Nunes, T. et al. (2009).

26. Muijs, D. et al (forthcoming), Evidence review for the EEF metacognition review. London: Education Endowment Foundation.

27. Lai, E. R. (2011). *Metacognition: A literature review*. Always learning: Pearson research report.

28. Wittwer, J., & Renkl, A. (2010). How effective are instructional explanations in example-based learning? A meta-analytic review. *Educational Psychology Review*, 22(4), 393-409.

29. Kramarski, B., & Mevarech, Z. R. (2003). Enhancing mathematical reasoning in the classroom: The effects of cooperative learning and metacognitive training. *American Educational Research Journal*, 40(1), 281-310.

30. Rittle-Johnson, B., Loehr, A. M., & Durkin, K. (2017). Promoting self-explanation to improve mathematics learning: A meta-analysis and instructional design principles. *ZDM, ZDM Mathematics Education*, 49 (4), pp. 1-13599–611.
31. Ellis, A. K., Denton, D. W., & Bond, J. B. (2014). An analysis of research on metacognitive teaching strategies. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 116, 4015-4024.
32. Kyriacou, C. and Issitt, J. (2008) What characterises effective teacher-initiated teacher-pupil dialogue to promote conceptual understanding in mathematics lessons in England in Key Stages 2 and 3: a systematic review. Technical report. In: Research Evidence in Education Library. London: EPPI-Centre, Social Science Research Unit, Institute of Education, University of London.
33. Walshaw, M., & Anthony, G. (2008). The teacher's role in classroom discourse: A review of recent research into mathematics classrooms. *Review of educational research*, 78(3), 523.
34. Ma, X., & Kishor, N. (1997). Assessing the relationship between attitude toward mathematics and achievement in mathematics: a meta-analysis. *Journal for Research In Mathematics Education*, 28(1), 27.
35. Greany, T., Barnes, I., Mostafa, T., Pesniero, N., & Swenson, C. (2016). Trends in Maths and Science Study (TIMSS): National Report for England. London: Department for Education.
36. Hill, N. E., & Tyson, D. F. (2009). Parental involvement in middle school: a meta-analytic assessment of the strategies that promote achievement. *Developmental psychology*, 45(3), 740.
37. Patall, E. A., Cooper, H., & Robinson, J. C. (2008). Parent Involvement in Homework: A Research Synthesis. *Review of Educational Research*, 78(4), 1039-1101.
38. Petronzi, D. (2016). The Development of the Numeracy Apprehension Scale for Children Aged 4-7 Years: Qualitative Exploration of Associated Factors and Quantitative Testing. University of Derby: Ph.D. Thesis.
39. Hembree, R. (1990). The nature, effects, and relief of mathematics anxiety. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(1), 33-46.
40. Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. In F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp 319-369). Charlotte, NC: Information Age Publishing).
41. Higgins, S., Xiao, Z. and Katsipataki, M. (2012) The Impact of Digital Technology on Learning: A Summary for the Education Endowment Foundation. London: Education Endowment Foundation. [https://educationendowmentfoundation.org.uk/public/files/Publications/The_Impact_of_Digital_Technologies_on_Learning_\(2012\).pdf](https://educationendowmentfoundation.org.uk/public/files/Publications/The_Impact_of_Digital_Technologies_on_Learning_(2012).pdf)
42. Dowker, A. (forthcoming). Review of Mathematics Education Programmes. London: The Education Endowment Foundation.
43. Gersten, R. et al (2009).
44. Dowker, A. (2009). What Works for Children with Mathematical Difficulties? The Effectiveness of Intervention Schemes. London: Department of Children, Schools and Families.;

Kaufmann, L., Mazzocco, M. M., Dowker, A., von Aster, M., Göbel, S. M., Grabner, R. H., Henik, A., Jordan, N., Karmiloff-Smith, A. D., Kucian, K., Rubinsten, O., Szucs, D., Shalev, R., & Nuerk, H. C. (2013). Dyscalculia from a developmental and differential perspective. *Frontiers in Psychology* 4: 516.

45. Brown, M., Askew, M., Hodgen, J., Rhodes, V., Millett, A., Denvir, H., & Wiliam, D. (2008). Individual and cohort progression in learning numeracy ages 5-11: Results from the Leverhulme 5-year longitudinal study. In A. Dowker (Ed.), *Mathematical Difficulties: Psychology and Intervention* (pp. 85-108). Oxford: Elsevier.

46. Higgins, S., Katsipataki, M., Coleman, R., Henderson, P., Major, L.E., Coe, R. & Mason, D. (2018). *The Sutton Trust-Education Endowment Foundation Teaching and Learning Toolkit*. London: Education Endowment Foundation.

47. NCETM curriculum glossary

<https://www.ncetm.org.uk/public/files/17308038/National+Curriculum+Glossary.pdf>

48. Ibid.

49. Ibid.

50. Ibid.

51. Ibid.

52. Ibid.

53. Ibid.