Annexes

Table des matières

Notations

Une série de données peut être soit une population dont on souhaite calculer les paramètres (statistique descriptive) soit un échantillon représentatif d'une population, échantillon dont on utilise les données pour estimer les paramètres de la population dont il est extrait (statistique inférentielle) en calculant des estimations.

Quand on considère une **population**, on note μ sa moyenne et σ son écart-type.

Quand on considère un **échantillon**, on note n sa taille, m sa moyenne et s son écart-type.

Dans ce texte, le résultat calculé pour un groupe de données identifié par une (ou plusieurs) lettre(s) est désigné par la notation générale utilisée pour ce résultat avec en indice la (ou les) lettre(s) permettant d'identifier le groupe.

Par exemple, si on s'intéresse aux scores de l'échantillon **a** (groupe traitement dans ce livre), on désignera par m_a leur moyenne. Si on s'intéresse aux scores prétest identifiés par la lettre x, on désignera par m_x leur moyenne. Si on s'intéresse aux scores prétest du groupe **a**, on désignera par m_{xa} leur moyenne.

Notations fréquemment utilisées

Un seul échantillon		
Taille	n	
Moyenne	m	
Écart-type	s	
Deux échantillons		
	Traitement (a)	Contrôle (b)
Taille	n_a	n_b
Moyenne	m_a	m_b
Écart-type	s_a	s_b
Taille totale	$N = n_a + n_b$	

Formules et tableaux Excel

Les numéros qui suivent certaines formules de cette annexe sont repris dans les tableaux Excel publiés sur le site www.mathadoc.fr pour permettre d'identifier la formule utilisée dans les calculs.

Annexe 1. Calculs avec des scores

Dans tous les calculs proposés ci-dessous, la dernière égalité donne la formule la plus simple à utiliser avec un tableur du type Excel (annexe 2). Dans le même but on remplacera $\sqrt{a}$ par $a^{0,5}$ (=a^0.5 dans Excel).

a. Description d'une série de donnée

Soit $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ une série de n données. On dit que n est l'effectif de la série de données, ou encore sa taille quand cette série est un échantillon.

On note S la somme de ces données.

$$S = x_1 + x_2 + x_3 + \ \dots + x_n = \textstyle\sum_i x_i \qquad \textbf{(1.1)}$$

Pour alléger l'écriture, on utilise le symbole $\sum_i$ pour désigner une somme de termes dont l'effectif est donné dans le texte (donc ici $\sum_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$).

On note m la moyenne de cette série de données quand il s'agit d'un échantillon ou μ quand il s'agit d'une population.

$$m\ (ou\ \mu) = \frac{\sum_i x_i}{n} = \frac{S}{n} \qquad (\mathbf{1.2})$$

Quand plusieurs données ont la même valeur, si on désigne par k_i le nombre de données qui ont comme valeur x_i et p le nombre de valeurs x_i différentes (on dit alors que ce sont des modalités et on a donc $\sum_i k_i = n$), il peut être plus rapide de calculer la moyenne en utilisant la formule suivante :

$$m\ (ou\ \mu) = \frac{k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_ix_i + \ \dots + k_px_p}{n} = \sum_{i=1}^{p} \frac{k_i}{n} \times x_i = \sum_{i=1}^{p} f_i \times x_i \qquad (\mathbf{1.3})$$

avec $f_i = \frac{k_i}{n}$ la fréquence de la valeur x_i et $\sum_i f_i$ =1.

On note SCE la somme des carrés des écarts des données à la moyenne :

$$SCE = \sum_i (x_i - m)^2\ ou\ \sum_i (x_i - \mu)^2 = \sum_i {x_i}^2 - \frac{(\sum_i x_i)^2}{n} \qquad (\mathbf{1.4})$$

<u>Quand la série de données est une population</u>

La moyenne de cette somme des carrés des écarts est la variance de la série de données. Elle mesure la dispersion moyenne des données autour de la moyenne. On la note var ou σ^2.

$$var = \sigma^2 = \frac{SCE}{n} = \frac{\sum_i (x_i - \mu)^2}{n} = \frac{\sum_i {x_i}^2}{n} - \frac{(\sum_i x_i)^2}{n^2} = \frac{\sum_i {x_i}^2}{n} - \mu^2 \qquad (\mathbf{1.5})$$

Et à nouveau, avec plusieurs données de même valeur, on peut utiliser les fréquences :

$$var = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{p} k_i (x_i - \mu)^2}{n} = \sum_{i=1}^{p} f_i \times (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{p} f_i \times x_i^2 - \mu^2 \qquad (\mathbf{1.6})$$

La racine carrée de la variance est égale à l'écart-type σ.

$$\sigma = \sqrt{\frac{SCE}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \mu)^2}{n}} \qquad (\mathbf{1.7})$$

<u>Quand la série de données est un échantillon</u>

On étudie les données de l'échantillon dans le but d'estimer les paramètres de la population dont il est extrait (on parle alors de statistiques inférentielles). Dans ce cas, on calculera s de cette façon :

$$s = \sqrt{\frac{SCE}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - m)^2}{n-1}} \qquad (\mathbf{1.8})$$

Et dans ce cas, on a aussi

$SCE = (n-1) \times s^2$ et $var = s^2$

<u>b. Description de deux séries de données indépendantes</u>[a]

Deux groupes d'élèves ont obtenus des scores après avoir passé un test. Dans le groupe **a**, les n_a scores sont notés $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n_a}$. Le terme général de cette série sera ici noté x_i (avec i variant de 1 à n_a). Dans le groupe **b**, les n_b scores sont notés $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n_b}$. Le terme général de cette série sera ici noté y_j (avec j variant de 1 à n_b). Ces deux séries de données sont indépendantes. En reprenant les notations utilisés ci-dessus, on définit m_a et SCE_a pour le groupe **a,** m_b et SCE_b pour le groupe **b**. Les formules utilisant les écarts-types s_a et s_b sont également proposées : dans ce cas, il s'agit de l'écart-type d'un échantillon

$$m_a = \frac{\sum_i x_i}{n_a} \; ; \; m_b = \frac{\sum_j y_j}{n_b}$$

$$SCE_a = \sum_i (x_i - m_a)^2 = \sum_i x_i^{\,2} - \frac{(\sum_i x_i)^2}{n_a} = (n_a - 1) \times s_a^2 \qquad (\mathbf{1.9})$$

$$SCE_b = \sum_j (y_j - m_b)^2 = \sum_j y_j^{\,2} - \frac{(\sum_j y_j)^2}{n_b} = (n_b - 1) \times s_b^2$$

[a] Ces calculs peuvent être adaptés à des cas où plus de deux groupes de données sont étudiés.

On va également considérer la série constituée des deux séries de données rassemblées $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n_a}, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n_b}$ dont l'effectif est égal à $N = n_a + n_b$. On définit alors $m_{a\ et\ b}$ la moyenne générale et $SCE_{a\ et\ b}$ la somme des carrés des écarts à la moyenne générale. On a

$$m_{a\ et\ b} = \frac{\sum_i x_i + \sum_j y_j}{n_a + n_b} = \frac{n_a \times m_a + n_b \times m_b}{n_a + n_b} \qquad (\mathbf{1.10})$$

On parle aussi de moyenne totale et on note $m_{a\ et\ b} = m_{total}$

$$SCE_{a\ et\ b} = SCE_{total} = \sum_i x_i^{\ 2} + \sum_j y_j^{\ 2} - \frac{(\sum_i x_i + \sum_j y_j)^2}{n_a + n_b} \qquad (\mathbf{1.11})$$

<u>Dispersion totale</u>

$SCE_{a\ et\ b}$ mesure la dispersion de toutes les données réunies autour de la moyenne générale. On parle aussi de dispersion **totale** et on note $SCE_{a\ et\ b} = SCE_{totale}$

<u>Dispersion intra</u>

$$SCE_a + SCE_b = \sum_i x_i^{\ 2} + \sum_j y_j^{\ 2} - \left[\frac{(\sum_i x_i)^2}{n_a} + \frac{(\sum_j y_j)^2}{n_b}\right] \qquad (\mathbf{1.12})$$

$SCE_a + SCE_b = (n_a - 1) \times s_a^2 + (n_b - 1) \times s_b^2$ (1.13)

$SCE_a + SCE_b$ mesure l'ensemble de la dispersion des données autour de leur moyenne dans chaque groupe. On parle aussi de dispersion **intra** (interne à chaque groupe) et on note $SCE_{intra} = SCE_a + SCE_b$

<u>Dispersion inter</u>

On mesure également la dispersion des moyennes de chaque groupe autour de la moyenne générale (noté SCE_{inter}) en calculant

$$SCE_{inter} = n_a \times m_a^2 + n_b \times m_b^2 - (n_a + n_b) \times m_{a\ et\ b}^2 \qquad (\mathbf{1.13})$$

$$SCE_{inter} = \frac{(\sum_i x_i)^2}{n_a} + \frac{(\sum_j y_j)^2}{n_b} - \frac{(\sum_i x_i + \sum_j y_j)^2}{n_a + n_b} \qquad \textbf{(1.14)}$$

On montre que $SCE_{total} = SCE_{inter} + SCE_{intra}$, on a donc

$SCE_{inter} = SCE_{a\ et\ b} - (SCE_a + SCE_b)$ (utilisée pour calculer SCE_{inter}) **(1.15)**

On utilise la variance inter, notée var_{inter}, et la variance intra, notée var_{intra}, dans le calcul du F de Fischer-Snédécor dans les ANOVA. Pour calculer var_{inter} et var_{intra} on devra diviser SCE_{inter} et SCE_{intra} par des degrés de liberté. Dans le cas de deux échantillons, le degré de liberté des échantillons est égal à $k - 1 = 2 - 1 = 1$ (k est le nombre d'échantillons) et le degré de liberté des données est égal à $n_a + n_b - 2$ donc

$$var_{inter} = \frac{SCE_{inter}}{k-1} = SCE_{inter} = n_a \times m_a^2 + n_b \times m_b^2 - (n_a + n_b) \times m_{a\ et\ b}^2 \qquad (\mathbf{1.16})$$

$$var_{intra} = \frac{SCE_{intra}}{n_a + n_b - 2} = \frac{(n_a - 1) \times s_a^2 + (n_b - 1) \times s_b^2}{n_a + n_b - 2} \qquad (\mathbf{1.17})$$

c. Description de deux séries de données corrélées

On considère cette fois une série de n couples de données :
$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$

Il s'agit par exemple des scores prétest et posttest de n élèves. On cherche à déterminer dans quelle mesure les scores posttest $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ sont dépendants des scores prétest $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. La variable y est alors la variable dépendante (celle qui intéresse le chercheur), la variable x est la variable indépendante (celle que le chercheur va essayer de contrôler). On dit que l'on étudie la corrélation entre les variables x et y. On calcule pour les scores prétests m_x, s_x, S_x, SCE_x et pour les scores posttests m_y, s_y, S_y, SCE_y.

On note SPE la **S**omme des **P**roduits des **E**carts à la moyenne (*sum of codeviates)* qui mesure la tendance des deux variables à covarier, c'est-à-dire à varier « dans le même sens ».

$$SPE = \sum_i (x_i - m_x)(y_i - m_y) = \sum_i x_i y_i - \frac{\sum_i x_i \sum_i y_i}{n} = SP - \frac{S_x \times S_y}{n} \qquad (\mathbf{1.18})$$

avec $SP = \sum_i x_i y_i$ (somme des produits).

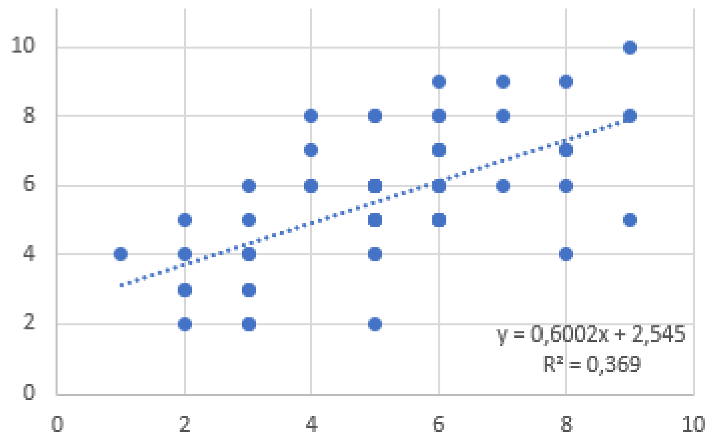
La moyenne des produits des écarts à la moyenne est la **COV**ariance des données, on la note $cov(x, y)$.

$$cov(x, y) = \frac{SPE}{n} = \frac{\sum_i (x_i - m_x)(y_i - m_y)}{n} = \frac{\sum_i x_i y_i}{n} - \frac{\sum_i x_i \sum_i y_i}{n^2} \qquad (\mathbf{1.19})$$

$$cov(x, y) = \frac{SP}{n} - \frac{S_x \times S_y}{n^2} \qquad (\mathbf{1.20})$$

De la même façon qu'avec le calcul de la variance, on divisera par $n - 1$ quand on considérera un échantillon dans le but d'estimer les paramètres de la population dont il est extrait.

Le nuage de points va dans un premier temps être tracé pour une première observation (exemple ci-dessous). Si ce nuage semble s'approcher d'une droite, on dira que les variables x et y sont corrélées. Une droite qui modélise cette corrélation (dite droite de régression) est la « droite des moindres carrés » (qui minimise le carré des distances à la droite).



Sur la représentation graphique, on affiche l'équation de la droite de régression ainsi que le coefficient de détermination R^2 (voir ci-dessous).

L'équation de la droite de régression est de la forme

$$y = a \times x + b$$

La pente de la droite de régression est donnée par le calcul suivant

$$a = \frac{SPE}{SCE_x} = \frac{\sum_i x_i y_i - \frac{\sum_i x_i \sum_i y_i}{n}}{\sum_i {x_i}^2 - \frac{(\sum_i x_i)^2}{n}} \qquad \mathbf{(1.21)}$$

Le point moyen (qui a comme coordonnées les moyennes des deux séries m_x et m_y) appartient à la droite de régression, donc l'ordonnée à l'origine est donnée par

$$b = m_y - a \times m_x$$

On va mesurer la qualité de la modélisation avec le calcul du coefficient de corrélation r.

$$r = \frac{cov}{s_x \times s_y} = \frac{SPE}{\sqrt{SCE_x \times SCE_y}} = \frac{\sum_i x_i y_i - \frac{\sum_i x_i \sum_i y_i}{n}}{\left[\sum_i {x_i}^2 - \frac{(\sum_i x_i)^2}{n}\right]^{0,5} \times \left[\sum_i {y_i}^2 - \frac{(\sum_i y_i)^2}{n}\right]^{0,5}} \qquad \mathbf{(1.22)}$$

Ce coefficient de corrélation est compris entre -1 (dans ce cas les points sont tous alignés et y décroît quand x croît) et 1 (les points sont tous alignés et y croît quand x croît).

Le carré du coefficient de corrélation r^2 (noté R^2 sur la représentation graphique ci-dessus) est donc

$$R^2 = r^2 = \frac{SPE^2}{SCE_x \times SCE_y} = \frac{\left[\sum_i x_i y_i - \frac{\sum_i x_i \sum_i y_i}{n}\right]^2}{\left[\sum_i {x_i}^2 - \frac{(\sum_i x_i)^2}{n}\right] \times \left[\sum_i {y_i}^2 - \frac{(\sum_i y_i)^2}{n}\right]} \qquad \mathbf{(1.23)}$$

Le coefficient de détermination est compris entre 0 et 1. Il est souvent donné en pourcentage et représente alors le pourcentage de variation de la variable y expliqué par les variations de la variable x selon le modèle linéaire proposé.

Dans le cas de scores posttests et prétests, on considère alors les scores posttests comme des données dépendantes des scores prétests, et on dira que ces deux séries de données sont **appariées** (voir plus loin l'ANOVA des différences de scores, annexe 7).

Annexe 2. Taille d'effet calculé pour une étude

Dans tout ce qui suit, on a deux échantillons indépendants (ou groupes de données) **a** et **b**.

Premières formules

Variance groupée pour deux groupes de données indépendantes.	$var_{intra} = \frac{(n_a - 1){s_a}^2 + (n_b - 1){s_b}^2}{n_a + n_b - 2} \quad \mathbf{(2.1)}$
Écart-type groupé pour deux groupes de données indépendantes.	$s = \sqrt{var_{intra}} = \sqrt{\frac{(n_a - 1){s_a}^2 + (n_b - 1){s_b}^2}{n_a + n_b - 2}} \quad \mathbf{(2.2)}$

	Différences standardisées (estimations ponctuelles)	Variances
Avec σ connu	$\frac{m_a - m_b}{\sigma}$ **(2.3)**	$var = \frac{n_a + n_b}{n_a \times n_b} \quad \mathbf{(2.4)}$
Le d de Cohen (avec s)	$d = \frac{m_a - m_b}{s} \quad \mathbf{(2.5)}$	$var_d = \frac{n_a + n_b}{n_a \times n_b} + \frac{d^2}{2(n_a + n_b)} \quad \mathbf{(2.6)}$
Le g de Hedges (avec s et le facteur correctif ω pour échantillons de petite taille)	$g = \frac{m_a - m_b}{s} \times \omega \quad \mathbf{(2.7)}$ avec $\omega = 1 - \frac{3}{4(n_a + n_b) - 9} \quad \mathbf{(2.8)}$	$var_g = \frac{n_a + n_b}{n_a \times n_b} \times \omega^2 + \frac{g^2}{2(n_a + n_b)} \quad \mathbf{(2.9)}$
Le Δ de Glass[a] **(avec s_b écart-type du groupe contrôle)**	$\Delta = \frac{m_a - m_b}{s_b} \quad \mathbf{(2.10)}$	$var_\Delta = \frac{n_a + n_b}{n_a \times n_b} + \frac{\Delta^2}{2(n_b - 1)} \quad \mathbf{(2.11)}$

A chaque fois, l'erreur standard s est égale à la racine carrée de la variance. Ainsi

$$s_g = \sqrt{var_g}$$

Taille de l'effet ajustée

Dans le cas d'une ANCOVA, on calcule (voir annexe 4)

$$g = \frac{m_{ya}ajustée - m_{yb}ajustée}{s'} \times \omega \quad \mathbf{(2.12)}$$

avec

$$s'^2 = \frac{(n_a - 1){s_{ya}}^2 + (n_a - 1){s_{yb}}^2}{n_a + n_b - 2} \quad \mathbf{(2.13)}$$

avec s_{ya} et s_{yb} les écarts-types non ajustés des scores posttests.

Quand les moyennes posttests ajustées ne sont pas disponibles, et que les scores posttest et prétest sont calculés à partir des même tests, on calcule

$$g = \frac{\left(m_{ya} - m_{yb}\right) - (m_{xa} - m_{xb})}{s'} \times \omega \quad \mathbf{(2.14)}$$

[a] MARFO P. (2019)

Différence entre le g de Hedges et le d de Cohen

	Cohen	Hedges
Tailles d'effet	$d = \frac{m_a - m_b}{s}$ $\quad(\mathbf{2.5})$	$g = d \times \omega = \frac{m_a - m_b}{s} \times \omega$ $\quad(\mathbf{2.7})$

avec $\omega = 1 - \frac{3}{4(n_a+n_b)-9}$ $\quad(\mathbf{2.8})$ $\qquad$ $s = \sqrt{\frac{(n_a-1)s_a{}^2+(n_b-1)s_b{}^2}{n_a+n_b-2}}$ $\quad(\mathbf{2.2})$ $\qquad$ et $N = n_a + n_b$

Dans le tableau ci-dessus, on a transformé les d de Cohen en g de Hedges (au centième près. Les tailles d'effet sont souvent arrondies au dixième près dans les publications, plus rarement au centième près.

N	ω	d de Cohen														
		0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1**	**1,1**	**1,2**	**1,3**	**1,4**	**1,5**
10	0,90323	0,09	0,18	0,27	0,36	0,45	**0,54**	**0,63**	**0,72**	**0,81**	**0,9**	**0,99**	**1,08**	**1,17**	**1,26**	**1,35**
15	0,94118	0,09	0,19	0,28	0,38	0,47	0,56	0,66	0,75	0,85	**0,94**	**1,04**	**1,13**	**1,22**	**1,32**	**1,41**
20	0,95775	0,10	0,19	0,29	0,38	0,48	0,57	0,67	0,77	0,86	0,96	1,05	1,15	1,25	**1,34**	**1,44**
25	0,96703	0,10	0,19	0,29	0,39	0,48	0,58	0,68	0,77	0,87	0,97	1,06	1,16	1,26	1,35	1,45
30	0,97297	0,10	0,19	0,29	0,39	0,49	0,58	0,68	0,78	0,88	0,97	1,07	1,17	1,26	1,36	1,46
35	0,9771	0,10	0,20	0,29	0,39	0,49	0,59	0,68	0,78	0,88	0,98	1,07	1,17	1,27	1,37	1,47
40	0,98013	0,10	0,20	0,29	0,39	0,49	0,59	0,69	0,78	0,88	0,98	1,08	1,18	1,27	1,37	1,47
45	0,98246	0,10	0,20	0,29	0,39	0,49	0,59	0,69	0,79	0,88	0,98	1,08	1,18	1,28	1,38	1,47
50	0,98429	0,10	0,20	0,30	0,39	0,49	0,59	0,69	0,79	0,89	0,98	1,08	1,18	1,28	1,38	1,48
55	0,98578	0,10	0,20	0,30	0,39	0,49	0,59	0,69	0,79	0,89	0,99	1,08	1,18	1,28	1,38	1,48
60	0,98701	0,10	0,20	0,30	0,39	0,49	0,59	0,69	0,79	0,89	0,99	1,09	1,18	1,28	1,38	1,48
65	0,98805	0,10	0,20	0,30	0,40	0,49	0,59	0,69	0,79	0,89	0,99	1,09	1,19	1,28	1,38	1,48
70	0,98893	0,10	0,20	0,30	0,40	0,49	0,59	0,69	0,79	0,89	0,99	1,09	1,19	1,29	1,38	1,48
75	0,98969	0,10	0,20	0,30	0,40	0,49	0,59	0,69	0,79	0,89	0,99	1,09	1,19	1,29	1,39	1,48
80	0,99035	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,59	0,69	0,79	0,89	0,99	1,09	1,19	1,29	1,39	1,49
85	0,99094	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,59	0,69	0,79	0,89	0,99	1,09	1,19	1,29	1,39	1,49
90	0,99145	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,59	0,69	0,79	0,89	0,99	1,09	1,19	1,29	1,39	1,49
95	0,99191	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,69	0,79	0,89	0,99	1,09	1,19	1,29	1,39	1,49
100	0,99233	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,69	0,79	0,89	0,99	1,09	1,19	1,29	1,39	1,49
105	0,9927	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,69	0,79	0,89	0,99	1,09	1,19	1,29	1,39	1,49
110	0,99304	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,79	0,89	0,99	1,09	1,19	1,29	1,39	1,49
115	0,99335	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,79	0,89	0,99	1,09	1,19	1,29	1,39	1,49
120	0,99363	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,79	0,89	0,99	1,09	1,19	1,29	1,39	1,49
125	0,99389	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,89	0,99	1,09	1,19	1,29	1,39	1,49
130	0,99413	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,89	0,99	1,09	1,19	1,29	1,39	1,49
135	0,99435	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,89	0,99	1,09	1,19	1,29	1,39	1,49
140	0,99456	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,99	1,09	1,19	1,29	1,39	1,49
145	0,99475	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,99	1,09	1,19	1,29	1,39	1,49
150	0,99492	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,99	1,09	1,19	1,29	1,39	1,49
155	0,99509	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,09	1,19	1,29	1,39	1,49
160	0,99525	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,09	1,19	1,29	1,39	1,49
165	0,99539	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,09	1,19	1,29	1,39	1,49
170	0,99553	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,19	1,29	1,39	1,49
175	0,99566	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,19	1,29	1,39	1,49
180	0,99578	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,19	1,29	1,39	1,49
185	0,9959	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,29	1,39	1,49
190	0,99601	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,29	1,39	1,49
195	0,99611	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,29	1,39	1,49
200	0,99621	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,39	1,49

Tenir compte des clusters (grappes ou classes)[a]

Quand la technique de l'échantillonnage en classes est utilisée, on sélectionne au hasard un certain nombre de classes pour représenter la population totale. Ce sont les scores des élèves (et non les scores des classes) qui sont mesurés. Ces scores ne sont pas indépendants.

On a en tout M classes et N élèves.
On va supposer que n, le nombre d'élèves par classe, est le même dans toutes les classes. On a donc

$$n = \frac{N}{M}$$

Remarque : n=1 correspond au cas où les élèves sont l'unité d'affectation (l'échantillonnage se fait au niveau des individus).
Certaines classes sont inclues dans le groupe traitement (a) ; les autres sont inclues dans le groupe contrôle (b). N_a est le nombre total d'élèves dans le groupe a (et même chose pour N_b dans le groupe b). Chaque élève a un score, on calcule une moyenne des scores pour chaque classe et une moyenne des scores pour chaque groupe (traitement ou contrôle).

Coefficient de corrélation intra-classe (ICC ou ρ)
On suppose que dans chaque classe les scores des élèves sont distribués normalement autour de la moyenne de la classe avec une même variance intra-classe. Cette **variance intra-classe** est égale à la somme des carrés des écarts des scores des élèves par rapport à la moyenne de leur classe, divisée par $N - M$. C'est aussi la somme des produits des variances de chaque classe avec leur effectif moins 1, divisée par $N - M$. Une variance intra-classe égale à zéro correspond au cas où tous les élèves ont la même note.

De la même façon, on suppose que les moyennes des classes dans chacun des deux groupes sont distribuées normalement (dans le groupe traitement autour de la moyenne de la population traitement ; dans le groupe contrôle autour de la moyenne de la population contrôle). La **variance totale** est égale à la somme des carrés des écarts des scores de chaque élève par rapport à la moyenne de son groupe (traitement ou contrôle) divisée par $N - 2$. C'est aussi la somme des produits des variances de chaque groupe avec leur effectif moins 1, divisée par $N - 2$. C'est en fait la variance calculée pour estimer l'écart-type groupé (utilisé dans les calculs de t et du g de Hedges).

$$variance\ totale\ =\ variance\ intra - classe\ +\ variance\ inter - classe$$

Donc $variance\ inter - classe\ =\ variance\ totale - variance\ intra - classe$

Par définition, le coefficient de corrélation intra-classe, noté ρ, est donné par :

$$\rho = \frac{variance\ inter - classe}{variance\ totale} = \frac{variance\ totale - variance\ intra - classe}{variance\ totale}$$

Ce coefficient est le reflet de la différence entre les classes. Il sera égal à zéro quand le regroupement en classe des sujets n'a pas d'impact sur la variance.

[a] BORENSTEIN (2019)

Taille d'effet
La taille d'effet est multipliée par un facteur correctif pour tenir compte de l'échantillonnage par classe. BORENSTEIN (2019) utilise dans ces calculs le d de Cohen comme taille d'effet (très proche du g de Hedges comme nous l'avons vu).

$$d_{corr} = d \times \sqrt{1 - \frac{2(n-1)\rho}{N-2}} = d \times \sqrt{\frac{N-2-2(n-1)\rho}{N-2}} \qquad (\mathbf{2.15})$$

Le facteur correctif est très proche de 1.

Remarque : la taille d'effet corrigée est inférieure à la taille d'effet sans correction.
Si $\rho = 0$ ou si $n = 1$ on a $d_{corr} = d$

Variance de la taille d'effet
Sans correction (chapitre 8) :

$$v = \frac{1}{N_a} + \frac{1}{N_b} + \frac{d^2}{2N} \qquad (\mathbf{2.16})$$

BORENSTEIN (2019, p.213) indique qu'une seconde formule est possible

$$v = \frac{1}{N_a} + \frac{1}{N_b} + \frac{d^2}{2(N-2)} \qquad (\mathbf{2.17})$$

Ces deux formules sont très proches pour des tailles d'échantillon supérieures à 30.

Avec correction :

$$v_{corr} = \left[\frac{1}{N_a} + \frac{1}{N_b}\right](1 + (n-1)\rho) + d^2 \frac{(N-2)(1-\rho)^2 + n(N-2n)\rho^2 + 2(N-2n)\rho(1-\rho)}{2(N-2)[(N-2) - 2(n-1)\rho]} \qquad (\mathbf{2.18})$$

Remarques :
1. $v_{corr} > v$
2. Si $\rho = 0$ ou si $n = 1$ on trouve :

$v_{corr} = \frac{1}{N_a} + \frac{1}{N_b} + \frac{d^2}{2(N-2)} = v$ (c'est la deuxième formule de la variance sans correction)

Intervalle de confiance
Si on suppose que les tailles d'effet sont distribuées normalement, on pourra alors calculer un intervalle de confiance pour la taille d'effet d au niveau de confiance 0,95 :

$$[d - 1{,}96\sqrt{v_{corr}}\ ;\ d + 1{,}96\sqrt{v_{corr}}]$$

Le What Works Clearinghouse propose d'effectuer un test t pour évaluer la significativité statistique de la taille d'effet (voir annexe 19).

Annexe 3. Tailles d'effet calculé pour une méta-analyse

Modèles de l'effet fixe et des effets aléatoires

Les calculs sont effectués pour k étude. Pour l'étude i (qui varie de 1 à k), la taille d'effet est le g de Hedges. Les notations utilisées sont celles du chapitre 10 (l'utilisation de l'étoile permet de distinguer les calculs menés dans le cadre du modèle des effets aléatoires).

Modèle de l'effet fixe	**Modèle des effets aléatoires (*)**
$P_{\mathrm{i}} = \frac{1}{var_{g_i}} = \frac{1}{s_{g_i}^2}$ **(3.1)** $M = \frac{\sum_i P_{\mathrm{i}} \times g_i}{\sum_i P_{\mathrm{i}}} = \frac{\sum_i \frac{1}{var_{g_i}} \times g_i}{\sum_i \frac{1}{var_{g_i}}}$ **(3.2)** $var_M = \frac{1}{\sum_i P_{\mathrm{i}}} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{var_{g_i}}}$ **(3.3)** $s_M = \sqrt{var_M} = \sqrt{\frac{1}{\sum_i P_{\mathrm{i}}}}$ **(3.4)**	$var_{g_i}{}^* = var_{g_i} + T^2$ **(3.6)**; $P_{\mathrm{i}}{}^* = \frac{1}{var_i{}^*}$ **(3.7)** $M^* = \frac{\sum_i P_{\mathrm{i}}{}^* \times g_i}{\sum_i P_{\mathrm{i}}{}^*} = \frac{\sum_i \frac{1}{var_{g_i} + T^2} \times g_i}{\sum_i \frac{1}{var_{g_i} + T^2}}$ **(3.8)** $var_{M^*} = \frac{1}{\sum_i P_{\mathrm{i}}{}^*} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{var_{g_i} + T^2}}$ **(3.9)** $s_{M^*} = \sqrt{var_{M^*}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_i P_{\mathrm{i}}{}^*}}$ **(3.10)**
Test Z	
Pour tester l'hypothèse nulle : « δ la taille d'effet de la population est égale à zéro » on calcule $Z = \frac{M}{s_M}$ **(3.11)**	Pour tester l'hypothèse nulle : « δ la taille d'effet moyenne de la population est égale à zéro » on calcule $Z = \frac{M^*}{s_{M^*}}$ **(3.12)**
Intervalle de confiance au niveau 0,95	
$[M - 1{,}96 \times s_M\ ;\ M + 1{,}96 \times s_M]$	$[M^* - 1{,}96 \times s_{M^*}\ ;\ M^* + 1{,}96 \times s_{M^*}]$

$$Q = \sum_i P_i [g_i - M]^2 = \sum_i \left[\frac{g_i - M}{s_{g_i}}\right]^2 = \sum_i P_{\mathrm{i}} g_i^2 - \frac{[\sum_i P_{\mathrm{i}}\, g_i]^2}{\sum_i P_{\mathrm{i}}} \qquad \mathbf{(3.13)}$$

$$Q = \sum_i \frac{g_i^2}{var_{g_i}} - \frac{\left[\sum_i \frac{g_i}{var_{g_i}}\right]^2}{\sum_i \frac{1}{var_{g_i}}} \qquad \mathbf{(3.14)}$$

Pour une analyse de la variance dans les études de sous-groupe, on calculé aussi

$$Q^* = \sum_i P_i{}^* [g_i - M]^2 \qquad \mathbf{(3.15)}$$

$$C = \sum_i P_i - \frac{\sum_i {P_i}^2}{\sum_i P_i} = \sum_i \frac{1}{var_{g_i}} - \frac{\sum_i \left[\frac{1}{var_{g_i}}\right]^2}{\sum_i \frac{1}{var_{g_i}}} \qquad (\mathbf{3.16})$$

$$T^2 = \frac{Q-(k-1)}{C} \qquad (\mathbf{3.17})$$

Autres calculs

Première méthode du WWC (avant 2020)	**Méthode de SLAVIN (2008)**
$ES = \frac{\sum_i g_i}{k} \qquad (\mathbf{3.18})$	Les tailles d'effets des études sont le Δ de Glass $ES = \frac{\sum_i N_i \times \Delta_i}{\sum_i N_i} \qquad (\mathbf{3.19})$ avec $N_i \leq 2\,500$

Si les tailles d'effet g_i sont statistiquement significativement positives, alors M (ou M^*) est statistiquement significativement positive

On fait l'hypothèse d'une distribution normale des tailles d'effets, avec α=0,05. Donc

$$\frac{g_i}{\sqrt{var_{g_i}}} = g_i\sqrt{P_i} > 1{,}96 \; et \; \sum_i \frac{g_i}{var_{g_i}} = \sum_i P_i \times g_i > 1{,}96 \sum_i \sqrt{P_i}$$

On estime la significativité statistique de M en effectuant un test Z avec

$$z_{obs} = \frac{M}{s_M} = \frac{\sum_i P_i \times g_i}{\sqrt{\sum_i P_i}},$$

Et d'après ce qui a été vu auparavant

$$\frac{M}{s_M} > 1{,}96 \frac{\sum_i \sqrt{P_i}}{\sqrt{\sum_i P_i}}$$

De plus, la somme des racines carrées est supérieure à la racine carrée d'une somme, donc

$$\sum_i \sqrt{P_i} > \sqrt{\sum_i P_i}\,, donc\; \frac{\sum_i \sqrt{P_i}}{\sqrt{\sum_i P_i}} > 1, donc\; \frac{M}{s_M} > 1{,}96$$

On a bien M statistiquement significativement différente de zéro.

Annexe 4. Tests statistiques

α est le risque de première espèce choisi (voir première page pour les notations utilisées).

<u>Tests $\boldsymbol{Z}$ d'une moyenne $\boldsymbol{M}$ comparée à une moyenne théorique</u>

- $n \geq 30$
- La statistique M suit une loi normale de paramètres μ et $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- m est une estimation de μ, s est une estimation de σ
- $Z = \frac{M-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit une loi normale de paramètres 0 et 1
- $H0$: μ= μ_0 $H1$: $\mu \neq \mu_0$
- Sous H_0, $Z = \frac{M-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit une loi normale de paramètres 0 et 1
- On conclue en comparant la valeur observée $\frac{m-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ aux valeurs critiques en fonction de α ou bien par le calcul de la valeur$-p$ comparée à α

<u>Tests $\boldsymbol{Z}$ d'une taille d'effet $\boldsymbol{G}$ comparée à 0</u>

- La statistique G suit une loi normale de paramètres δ et σ_g
- g est une estimation de δ, s_g est une estimation de σ_g, s est une estimation de σ (écart-type de la poppulation des scores)
- $g = \frac{m_a - m_b}{s} \times \omega,\ s = \sqrt{\frac{(n_a-1)s_a{}^2+(n_b-1)s_b{}^2}{n_a+n_b-2}}$ et $\omega = 1 - \frac{3}{4(n_a+n_b)-9}$
- Erreur standard de G : $s_g = \sqrt{var_g} = \sqrt{\frac{n_a+n_b}{n_a \times n_b} + \omega^2 \times \frac{g^2}{2(n_a+n_b)}}$
- $Z = \frac{G-\delta}{s_g}$ suit une loi normale de paramètres 0 et 1
- $H0$: δ= 0 $H1$: $\delta \neq 0$
- Sous H_0, $\frac{G}{s_g}$ suit une loi normale de paramètres 0 et 1
- On conclue en comparant la valeur observée $\frac{g}{s_g}$ aux valeurs critiques en fonction de α ou bien par le calcul de la valeur$-p$ comparée à α

<u>Tests $\boldsymbol{Z}$ d'une taille d'effet globale ES comparée à 0</u>

- $ES = M$ ou $ES = M^*$
- La statistique ES suit une loi normale[a].
- ES est une estimation de la taille d'effet de la population δ
- Erreur standard de ES notée s_{ES}
- H0 : $\delta = 0$
- On conclue en comparant la valeur observée $z = \frac{ES}{s_{ES}}$ aux valeurs critiques en fonction de α ou bien par le calcul de la valeur$-p$ comparée à α

[a] Dans les notations, on ne distingue pas ici paramètre, estimateur et estimation.

Test Z d'une différence de moyennes $M_a - M_b$

- $n_a \geq 30$ et $n_b \geq 30$
- La statistique $M_a - M_b$ suit une loi normale de paramètres $\mu_a - \mu_b$ et $\sqrt{\frac{\sigma_a{}^2}{n_a} + \frac{\sigma_b{}^2}{n_b}}$.
- $m_a - m_b$ est une estimation de $\mu_a - \mu_b$
- Une estimation de $\sqrt{\frac{\sigma_a{}^2}{n_a} + \frac{\sigma_b{}^2}{n_b}}$ est $\sqrt{\frac{s_a{}^2}{n_a} + \frac{s_b{}^2}{n_b}}$ $\quad (\mathbf{4.1})$
- $H0$: $\mu_a - \mu_b = 0 \qquad H1$: $\mu_a - \mu_b \neq 0$
- Sous H_0, $Z = \frac{M_a - M_b}{\sqrt{\frac{\sigma_a{}^2}{n_a} + \frac{\sigma^2}{n_b}}}$ suit une loi normale de paramètres 0 et 1.
- $z_{obs} = \frac{m_a - m_b}{\sqrt{\frac{s_a{}^2}{n_a} + \frac{s_b{}^2}{n_b}}}$ $\quad (\mathbf{4.2})$
- On conclue en comparant la valeur observée z_{obs} aux valeurs critiques en fonction de α ou bien par le calcul de la valeur$-p$ comparée à α.

Test T d'une différence de moyennes $M_a - M_b$

- $n_a < 30$ ou $n_b < 30$, $\sigma_a = \sigma_b = \sigma$
- $m_a - m_b$ est une estimation de $\mu_a - \mu_b$
- S est un estimateur de σ (écart-type de la population), s est une estimation de σ
- $s = \sqrt{\frac{(n_a - 1)s_a{}^2 + (n_b - 1)s_b{}^2}{n_a + n_b - 2}}$ $\quad (\mathbf{4.3})$
- $\sqrt{\frac{(n_a - 1)s_a{}^2 + (n_b - 1)s_b{}^2}{n_a + n_b - 2}} \times \sqrt{\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b}}$ est une estimation de $\sqrt{\frac{\sigma_a{}^2}{n_a} + \frac{\sigma_b{}^2}{n_b}} = \sigma \times \sqrt{\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b}}$
- $T = \frac{M_a - M_b}{\sqrt{\frac{S^2}{n_a} + \frac{S^2}{n_b}}}$ suit une loi de Student à $n_a + n_b - 2$ degré de liberté avec
- $H0$: $\mu_a - \mu_b = 0 \qquad H1$: $\mu_a - \mu_b \neq 0$
- $t_{obs} = \frac{m_a - m_b}{\sqrt{\frac{s^2}{n_a} + \frac{s^2}{n_b}}}$ $\quad (\mathbf{4.4})$
- On conclue en comparant la valeur observée, t_{obs}, aux valeurs critiques (avec $n_a + n_b - 2$ comme degré de liberté) en fonction de α ou bien par le calcul de la valeur$-p$ comparée à α.

Pour la suite de cette annexe, se reporter à l'**annexe 1** pour le détail des calculs.

Analyse de la variance (ANOVA)

On calcule le F observé de Fischer-Snédécor. Le degré de liberté du nombre des k échantillons (égal à $k - 1$) et le degré de liberté de l'ensemble des données ($N - k$) interviennent dans ce calcul.

$$F(k-1, N-k) = \frac{var_{inter}}{var_{intra}} = \frac{\frac{SCE_{inter}}{k-1}}{\frac{SCE_{intra}}{N-k}}$$

Dans le cas de deux échantillons $k = 2$, et avec $N = n_a + n_b$, alors on a :

$$F(1, N-2) = \frac{SCE_{inter}}{\frac{SCE_{intra}}{n_a + n_b - 2}} = \frac{SCE_{a\ et\ b} - (SCE_a + SCE_b)}{SCE_a + SCE_b} \times (n_a + n_b - 2) \qquad \mathbf{(4.5)}$$

Remarque : $F = {t_{obs}}^2$

Quand on a les moyennes des scores des deux groupes, ainsi que les écarts-types des scores dans chacun des deux groupes, on peut calculer F de cette façon :

$$F(1, N-2) = \frac{n_a \times {m_a}^2 + n_b \times {m_b}^2 - (n_a + n_b)\left[\frac{n_a \times m_a + n_b \times m_b}{n_a + n_b}\right]^2}{\frac{(n_a - 1) \times {s_a}^2 + (n_b - 1) \times {s_b}^2}{n_a + n_b - 2}}$$

Analyse de la covariance (ANCOVA)

On évalue une différence entre deux échantillons après un traitement en tenant compte de l'influence d'une covariable. Dans un design pré/posttests, les scores prétests obtenus par les élèves du groupe traitement et du groupe contrôle sont les covariables, la variable « appartenance à tel ou tel groupe » est une variable qualitative indépendante et la variable score posttest est la variable dépendante. On note (par exemple) m_{ya} la moyenne des scores posttests du groupe **a**.

On a 4 jeux de données :

Groupes	Groupe **a** (traitement)		Groupe **b** (contrôle)	
	prétest	posttest	prétest	posttest
Scores	xa	ya	xb	yb
Moyennes	m_{xa}	m_{ya}	m_{xb}	m_{yb}
Somme des carrés des écarts	SCE_{xa}	SCE_{ya}	SCE_{xb}	SCE_{yb}
Somme des produits des écarts	SPE_a		SPE_b	

Étape a. Étude ANOVA des scores posttests y

On calcule :

$SCE_{intra(ya,yb)} = SCE_{ya} + SCE_{yb}$

$SCE_{total(ya,yb)} = SCE_{ya\ et\ yb}$

$SCE_{inter(ya,yb)} = SCE_{total(ya,yb)} - SCE_{intra(ya,yb)} = SCE_{ya\ et\ yb} - SCE_{ya} - SCE_{yb}$

On ajustera $SCE_{intra(ya,yb)}$ et $SCE_{inter(ya,yb)}$ à l'étape c.

Étape b. Étude ANOVA des scores prétests x

Ces résultats sont utilisés pour calculer les coefficients de détermination indispensables pour ajuster les variances calculées à l'étape a et les moyennes (voir étapes c et d).

$SCE_{intra(xa,xb)} = SCE_{xa} + SCE_{xb}$

$SCE_{total(xa,xb)} = SCE_{xa\ et\ xb}$

Étape c. Ajustement des variances

$$SCE_{total(ya,yb)}ajustée = SCE_{total(ya,yb)} \times \left(1 - r_{total(x,y)}{}^2\right) \quad (\mathbf{4.6})$$

Avec $r_{total(x,y)}{}^2$ le coefficient de détermination que l'on calcule en analysant la corrélation entre les variables x et y quand les deux groupes **a** et **b** sont réunis.

$r_{total(x,y)}{}^2$ est un nombre compris entre 0 et 1, qui est souvent donné sous la forme d'un pourcentage. D'un point de vue pratique, c'est le pourcentage de variation des données dépendantes (ici la variable y) qui est expliqué par la variation des données indépendantes (ici la covariable x). Pour calculer $SCE_{total(ya,yb)}ajustée$, on a en fait retranché à $SCE_{total(ya,yb)}$ la part de la variation qui est expliquée par la corrélation (n'oublions pas que l'objectif est de s'affranchir de l'influence de la covariable x).

$$r_{total(x,y)}{}^2 = \frac{SPE_{total(x,y)}{}^2}{SCE_{total(xa,xb)} \times SCE_{total(ya,yb)}} \quad (\mathbf{4.7})$$

On procède de la même façon pour le calcul suivant :

$$SCE_{intra(ya,yb)}ajustée = SCE_{intra(ya,yb)} \times \left(1 - r_{intra(x,y)}{}^2\right) \quad (\mathbf{4.8})$$

Avec $r_{intra(x,y)}{}^2$ le coefficient de détermination agrégé calculé lors de l'analyse de la corrélation interne à chacun des groupes (ou encore corrélation intra).

$$r_{intra(x,y)}{}^2 = \frac{SPE_{\ intra(x,y)}{}^2}{SCE_{intra(xa,xb)} \times SCE_{intra(ya,yb)}} = \frac{(SPE_{\ (xa,ya)} + SPE_{\ (xb,yb)})^2}{SCE_{intra(xa,xb)} \times SCE_{intra(ya,yb)}} \quad (\mathbf{4.9})$$

Et enfin :

$$SCE_{inter(ya,yb)}ajustée = SCE_{total(ya,yb)}ajustée - SCE_{intra(ya,yb)}ajustée \quad (\mathbf{4.10})$$

Étape d. Ajustement des moyennes

C'est sur cette différence des moyennes ajustées que va porter la conclusion.

On ajuste les moyennes des scores posttests dans les deux groupes en prenant en compte la différence entre les deux groupes des moyennes des scores prétests.

On calcule $a_{intra(x,y)}$la pente de la droite de régression correspondant à la corrélation intra précédemment évoquée.

$$a_{intra(x,y)} = \frac{SPE_{intra(x,y)}}{SCE_{intra(xa,xb)}} = \frac{SPE_{\ (xa,ya)} + SPE_{(xb,yb)}}{SCE_{intra(xa,xb)}} \quad (\mathbf{4.11})$$

$$m_{ya}ajustée = m_{ya} + a_{intra(x,y)} \times \left(m_{total(xaxb)} - m_{xa}\right) \quad (\mathbf{4.12})$$

$$m_{yb}ajustée = m_{yb} + a_{intra(x,y)} \times \left(m_{total(xaxb)} - m_{xb}\right) \quad (\mathbf{4.13})$$

Ces moyennes ajustées sont utilisées également dans les calculs de taille d'effet (notamment pour agréger les résultats lors de méta analyses).

Étape e. Calcul de $F(1, N-3)$

$$F(1, N-3) = \frac{var_{inter}ajustée}{var_{intra}ajustée} = \frac{SCE_{inter(ya,yb)}ajustée}{\frac{SCE_{intra(ya,yb)}ajustée}{n_a + n_b - 3}} \quad (\mathbf{4.14})$$

Analyse de la variance (ANOVA) des différences

On analyse ici les différences des résultats entre les scores posttest et prétest pour chacun des élèves. On a le jeu de données suivant :

Groupes	Groupe **a** (traitement)			Groupe **b** (contrôle)		
	prétest	posttest	Différence	prétest	posttest	Différence
Scores	xa	ya	$ya - xa$	xb	yb	$yb - xb$
Moyennes	m_{xa}	m_{ya}	$d_a = m_{ya-xa}$	m_{xb}	m_{yb}	$d_b = m_{yb-xb}$
Somme des carrés des écarts	SCE_{xa}	SCE_{ya}	SCE_{ya-xa}	SCE_{xb}	SCE_{yb}	SCE_{yb-xb}

Remarque : $d_a = m_{ya-xa} = m_{ya} - m_{xa}$ $\quad$ $(\mathbf{4.15})$

Calcul du Fde Fischer-Snédécor :

$$F(1, N-2) = \frac{SCE_{inter}}{\frac{SCE_{intra}}{n_a + n_b - 2}} = \frac{SCE_{total} - SCE_{intra}}{\frac{SCE_{intra}}{n_a + n_b - 2}} \qquad (\mathbf{4.16})$$

$$F(1, N-2) = \frac{SCE_{ya-xa\ et\ yb-xb} - SCE_{ya-xa} - SCE_{yb-xb}}{SCE_{ya-xa} + SCE_{yb-xb}} \times (n_a + n_b - 2)$$

Remarque : $F = {t_{obs}}^2$

Quand on a les moyennes des scores posttests et prétests des deux groupes, ainsi que les écarts-types des différences de scores dans chacun des deux groupes, on peut calculer F de cette façon :

$$F(1, N-2) = \frac{n_a \times {d_a}^2 + n_b \times {d_b}^2 - (n_a + n_b)\left[\frac{n_a \times d_a + n_b \times d_b}{n_a + n_b}\right]^2}{\frac{(n_a - 1) \times {s_{da}}^2 + (n_b - 1) \times {s_{db}}^2}{n_a + n_b - 2}}$$

Si on dispose des écarts-types des scores des groupes ($s_{xa}, s_{xb}, s_{ya}\ et\ s_{yb}$) et des coefficients de corrélations entre les sores posttests et prétest de chacun des groupes ($r_{xa,ya}$et $r_{xb,yb}$), on a alors :

$${s_{da}}^2 = {s_{xa}}^2 + {s_{ya}}^2 - 2 \times r_{xa,ya} \times s_{xa} \times s_{ya}$$

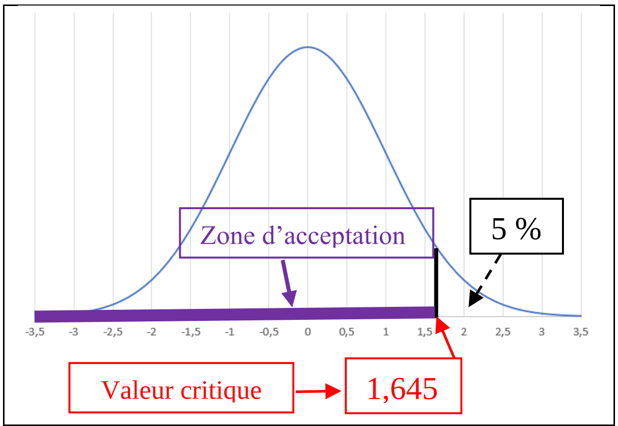
$${s_{db}}^2 = {s_{xb}}^2 + {s_{yb}}^2 - 2 \times r_{xb,yb} \times s_{xb} \times s_{yb}$$

Test Z unilatéral de la différence de deux moyennes

Les tests unilatéraux sont à utiliser avec précaution et sont en général réservés aux situations dans lesquelles il n'est pas possible que $\mu_a < \mu_b$. On a la statistique centrée réduite Z définie par

$$Z = \frac{M_a - M_b}{\sqrt{\frac{{\sigma_a}^2}{n_a} + \frac{{\sigma_b}^2}{n_b}}}.$$

Hypothèse nulle H0 : $\mu_a = \mu_b$
Hypothèse alternative H1 : $\mu_a > \mu_b$.
Si H0 est vraie, alors $p(Z < 1{,}65) = 0{,}95$; ce qui revient à dire que 95% des réalisations de Z sont inférieures à 1,65, et que 5 % des réalisations de Z sont supérieures à 1,65. On définit ici une zone d'acceptation qui correspond aux valeurs inférieures à 1,65 (figure ci-dessous). De la même façon que pour un test bilatéral, en fonction de la valeur observée, on conclura en acceptant ou en rejetant l'hypothèse nulle, en prenant là aussi des risques de se tromper. On voit par exemple que si la valeur observée est comprise entre 1,96 et 1,645 dans le cas d'un test bilatéral on ne rejettera pas l'hypothèse nulle, et que le cas d'un test unilatéral on la rejettera.



Zone d'acceptation : $z_{obs} < 1{,}645$
On note $z_{0,05} = 1{,}645$

Test unilatéral avec la statistique Z

Pour un test Z unilatéral, la valeur$-p$ serait égale ici à 0,036. Cette valeur peut être calculée pour un test T de la même façon : avec un degré de liberté égal à 58, on trouve comme résultat p =0,077.

Table de Student

Valeurs critiques de la statistique de Student pour les tests bilatéraux avec α=0,05, en fonction du degré de liberté (DDL) des deux échantillons (égal à $n_a + n_b - 2$)

DDL	t critique	DDL	t critique	DDL	t critique	DDL	t critique
1	12,7062047	41	2,01954097	81	1,98968632	121	1,97976376
2	4,30265273	42	2,0180817	82	1,98931856	122	1,97959988
3	3,18244631	43	2,0166922	83	1,98895978	123	1,97943869
4	2,77644511	44	2,01536757	84	1,98860967	124	1,97928012
5	2,57058184	45	2,01410339	85	1,98826791	125	1,97912411
6	2,44691185	46	2,0128956	86	1,98793421	126	1,9789706
7	2,36462425	47	2,01174051	87	1,98760828	127	1,97881953
8	2,30600414	48	2,01063476	88	1,98728986	128	1,97867085
9	2,26215716	49	2,00957524	89	1,9869787	129	1,97852449
10	2,22813885	50	2,00855911	90	1,98667454	130	1,97838041
11	2,20098516	51	2,00758377	91	1,98637715	131	1,97823854
12	2,17881283	52	2,00664681	92	1,98608632	132	1,97809884
13	2,16036866	53	2,005746	93	1,98580181	133	1,97796126
14	2,14478669	54	2,00487929	94	1,98552344	134	1,97782576
15	2,13144955	55	2,00404478	95	1,985251	135	1,97769228
16	2,1199053	56	2,00324072	96	1,98498431	136	1,97756078
17	2,10981558	57	2,00246546	97	1,98472319	137	1,97743121
18	2,10092204	58	2,00171748	98	1,98446745	138	1,97730354
19	2,09302405	59	2,00099538	99	1,98421695	139	1,97717772
20	2,08596345	60	2,00029782	100	1,98397152	140	1,97705372
21	2,07961384	61	1,99962358	101	1,983731	141	1,97693149
22	2,07387307	62	1,99897152	102	1,98349526	142	1,97681099
23	2,06865761	63	1,99834054	103	1,98326414	143	1,9766922
24	2,06389856	64	1,99772965	104	1,98303753	144	1,97657507
25	2,05953855	65	1,99713791	105	1,98281527	145	1,97645956
26	2,05552944	66	1,99656442	106	1,98259726	146	1,97634565
27	2,05183052	67	1,99600835	107	1,98238337	147	1,97623331
28	2,04840714	68	1,99546893	108	1,98217348	148	1,97612249
29	2,04522964	69	1,99494542	109	1,98196749	149	1,97601318
30	2,04227246	70	1,99443711	110	1,98176528	150	1,97590533
31	2,03951345	71	1,99394337	111	1,98156676	151	1,97579892
32	2,03693334	72	1,99346357	112	1,98137181	152	1,97569393
33	2,0345153	73	1,99299713	113	1,98118036	153	1,97559032
34	2,03224451	74	1,9925435	114	1,9809923	154	1,97548806
35	2,03010793	75	1,99210215	115	1,98080754	155	1,97538713
36	2,028094	76	1,99167261	116	1,980626	156	1,97528751
37	2,02619246	77	1,9912544	117	1,9804476	157	1,97518916
38	2,02439416	78	1,99084707	118	1,98027225	158	1,97509207
39	2,02269092	79	1,99045021	119	1,98009988	159	1,97499621
40	2,02107539	80	1,99006342	120	1,97993041	160	1,97490156

Dans Excel, saisir =LOI.STUDENT.INVERSE.BILATERALE(0,05;A2) avec dans A2 la valeur du degré de liberté (DDL).

Annexe 5. Variables aléatoires

Variances et écarts-types

On va noter ici $var(X)$ la variance d'une variable aléatoire X et $\sigma(X)$ son écart-type. Alors

$$\sigma(X) = \sqrt{var(X)}$$

Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes**[a] et a un nombre quelconque, on va admettre ici que

$$\boxed{\begin{array}{c} var(X+Y) = var(X-Y) = var(X) + var(Y) \\ var(aX) = a^2 \times var(X) \end{array}}$$

Donc

$\sigma(X+Y) = \sigma(X-Y) = \sqrt{var(X) + var(Y)}$

$\sigma(aX) = \sqrt{var(aX)} = |a| \times \sigma(X)$

Soient $X_1, X_2, \dots . X_n, n$ variables aléatoires **indépendantes** dont les variances sont toutes égales, c'est-à-dire que $var(X_i) = var(X)$ et $\sigma(X_i) = \sigma(X)$, alors on déduit de ce qui précède que

Variance de la somme des n variables aléatoires	$var\left[\sum_i X_i\right] = \sum_i var(X_i) = n \times var(X)$
Variance de la moyenne Des n variables aléatoires	$var\left[\frac{\sum_i X_i}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\sum_i var(X_i) = \frac{1}{n^2} \times n \times var(X) = \frac{var(X)}{n}$
Écart-type de la somme Des n variables aléatoires	$\sigma\left[\sum_i X_i\right] = \sqrt{var\left[\sum_i X_i\right]} = \sqrt{n \times var(X)} = \sqrt{n} \times \sigma(X)$
Écart-type de la moyenne des n variables aléatoires	$\sigma\left[\frac{\sum_i X_i}{n}\right] = \sqrt{var\left[\frac{\sum_i X_i}{n}\right]} = \sqrt{\frac{var(X)}{n}} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Lois normales

On note $E(X)$ l'espérance de la variable aléatoire X.Soient X et Y deux variables aléatoires telles que X suive une loi normale de paramètres $E(X)$ et $\sigma(X)$, et Y suive une loi normale de paramètres $E(Y)$ et $\sigma(Y)$. Soit r un nombre réel. Alors

- La variables aléatoire $X+Y$ suit une loi normale de paramètres $E(X) + E(Y)$ et $\sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}$
- La variables aléatoire $X-Y$ suit une loi normale de paramètres $E(X) - E(Y)$ et $\sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}$
- La variable aléatoire centrée réduite Z suit une loi normale centrée réduite, avec

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

- La variable aléatoire $X + r$ suit une loi normale de paramètre $E(X) + r$ et $\sigma(X)$

[a] Quand ces variables sont dépendantes, on a alors $var(X+Y) = var(X) + var(Y) + 2cov(X,Y)$ et $var(X-Y) = var(X) + var(Y) - 2cov(X,Y)$

Score-$\boldsymbol{Z}$ d'une variable aléatoire $\boldsymbol{X}$

Si X suit une loi normale de paramètres μ et σ, alors la variable aléatoire centrée -réduite

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{var(X)}} = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

suit une loi normale centrée réduite (de paramètre 0 et 1). On note $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Score-$\boldsymbol{Z}$ d'une moyenne $\boldsymbol{M}$

Dans une population de moyenne μ et d'écart-type σ, on prélève au hasard des échantillons de taille n. Leurs moyennes sont des estimations de μ et des réalisations de l'estimateur M.

L'erreur standard (écart-type) de la moyenne M est $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Dans les conditions du théorème central limite, M suit une loi normale de paramètres μ et $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

La variable centrée réduite Z

$$Z = \frac{M - E(M)}{\sqrt{var(M)}} = \frac{M - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{M - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

suit une loi normale centrée réduite (de paramètre 0 et 1).

Score-$\boldsymbol{Z}$ d'une taille d'effet $\boldsymbol{G}$

On calcule une taille d'effet expérimentale en calculant le g de Hedges, qui est une réalisation de l'estimateur G et une estimation du paramètre δ. On calcule l'erreur standard de G notée s_g (annexe 5). On suppose que G suit une loi normale de paramètre δ et d'écart-type estimé par s_g. La variable centrée réduite Z

$$Z = \frac{G - E(G)}{\sqrt{var(G)}} = \frac{G - \delta}{s_g}$$

suit une loi normale centrée réduite (de paramètre 0 et 1).

Table de scores-*z*

Cette table donne la proportion des données inférieures à un score-z donné. Ainsi, si on cherche la proportion de la population dont le score PISA est inférieur à 600, on transforme ce score PISA en score-z $= \frac{600-488,3}{95,1} \approx 1,17$. Comme $1,17 = 1,1 + 0,07$ on se place à l'intersection de la ligne 1,1 et de la colonne 0,07 où on lit que la proportion est égale à 0,879. Grace aux propriétés liées à la symétrie de la courbe normale, on peut obtenir n'importe quelle proportion[a].

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,504	0,508	0,512	0,516	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,591	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,648	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,67	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,695	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,719	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,758	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,791	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,834	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,898	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,937	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,983	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,985	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,989
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,992	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,994	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,996	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,997	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,998	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,999	0,999
3,1	0,999	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

a Saisir =LOI.NORMALE.STANDARD. N(x ;VRAI) avec x la somme des têtes de ligne et colonne pour calculer les proportions.

Annexe 6. Intervalles de confiances

<u>Estimation par intervalle d'une moyenne</u>

Dans une population de moyenne μ et d'écart-type σ on prélève aléatoirement (en théorie avec remise) un unique échantillon de taille n et on mesure un caractère sur cet échantillon. On considère que ces mesures sont les premières réalisations de n variables aléatoires X_i indépendantes deux à deux qui suivent la même loi de probabilité, la loi de probabilité de la variable X (loi-mère). On définit alors deux variables aléatoires M (variable moyenne d'échantillonnage) et S^2 (variable variance d'échantillonnage) qui sont des estimateurs des paramètres μ et σ^2.

$M = \frac{\sum X_i}{n}$ $\quad S^2 = \frac{\sum (X_i - M)^2}{n-1}$

Variables	Espérance	Variance	Écart-type	Réalisation(s)
X	μ	σ^2	σ	
X_i	μ	σ^2	σ	x_i
M	μ	$\frac{\sigma^2}{\mathrm{n}}$	$\frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{n}}}$	$m = \frac{\sum x_i}{n}$
S^2	σ^2	si $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et $n \geq 30$ $\sigma^4 \times \frac{2}{n-1}$	si $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et $n \geq 30$ $\sigma^2 \times \sqrt{\frac{2}{n-1}}$	$s^2 = \frac{\sum (x_i - m)^2}{n-1}$

<u>1. Si μ et σ sont connus</u>

Variable X	Si $n \geq 30$	Si $n < 30$
$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$Z = \frac{M-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ (propriétés des variables aléatoires)	
X suit une loi inconnue	$Z = \frac{M-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ (théorème central limite)	On ne peut pas conclure

Avec les probabilités : $p\left(\mu - 1{,}96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq M \leq \mu + 1{,}96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}95$

Intervalle de **fluctuation** de la moyenne au seuil de confiance de 0,95 : $\left[\mu - 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \mu + 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

<u>2. Si μ et σ sont inconnus</u> (et on souhaite estimer μ par un intervalle)

Variable X	Si $n \geq 30$	Si $n < 30$
$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$	On remplace σ par son estimation s $Z = \frac{M-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ (propriétés variables aléatoires)	On **ne** remplace **pas** σ par son estimation s $T = \frac{(M-\mu)}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{T}$(n-1)
	ou bien on **ne** remplace **pas** σ par son estimation s $T = \frac{(M-\mu)}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{T}$(n-1)	
X suit une loi inconnue	On remplace σ par son estimation s $Z = \frac{M-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ (théorème central limite)	On ne peut pas conclure

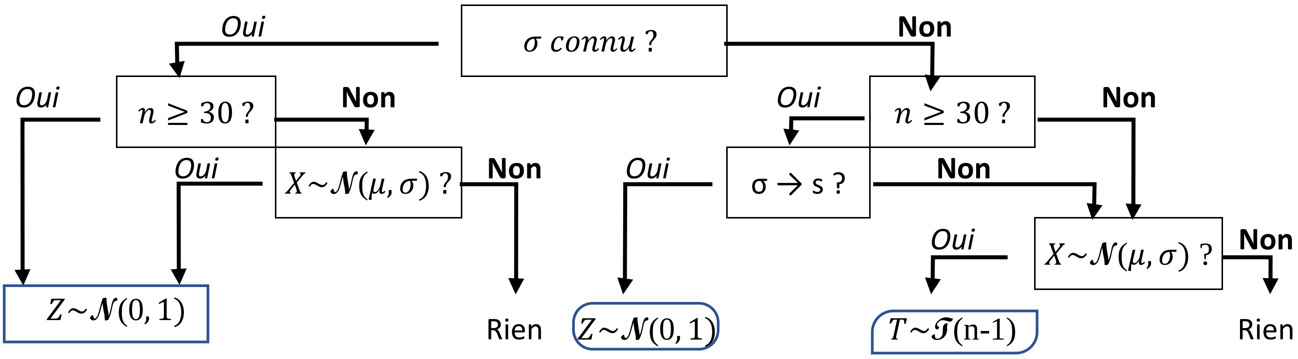
Avec les probabilités : $p\left(M - 1{,}96 \times \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \; et \; M + 1{,}96 \times \frac{s}{\sqrt{n}} \geq \mu\right) = 0{,}95$

Ou bien $p\left(M - t_{0{,}025;n-1} \times \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \; et \; M + t_{0{,}025;n-1} \times \frac{s}{\sqrt{n}} \geq \mu\right) = 0{,}95$

Intervalle de **confiance** de la moyenne au seuil de confiance de 0,95 : $\left[m - 1{,}96 \frac{s}{\sqrt{n}} ; m + 1{,}96 \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

ou bien $\left[m - t_{0{,}025;\,n-1} \times \frac{s}{\sqrt{n}} ; m + t_{0{,}025;\,n-1} \times \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

En fonction des données de départ, on aura les choix suivants :



Les bornes de l'intervalle de confiance au seuil de 0,95 sont alors :

$\boxed{m \pm 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ $\qquad$ $\boxed{m \pm 1{,}96 \frac{s}{\sqrt{n}}}$ $\qquad$ $\boxed{m \pm t_{0,025;n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}}$

En pratique, si σ est inconnu, on calcule les bornes des intervalles de confiance de la manière suivante :

	Loi normale	Loi de Student
Borne inférieure	$m - 1{,}96 \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (\mathbf{6.1})$	$m - t_{0,025;n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (\mathbf{6.3})$
Borne supérieure	$m + 1{,}96 \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (\mathbf{6.2})$	$m + t_{0,025;n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (\mathbf{6.4})$

<u>Intervalles de confiance d'une différence de moyenne, d'une taille d'effet</u>

Le niveau de confiance choisi est égal à $1 - \alpha$. Ici $\alpha = 0{,}05$.

Paramètres estimés	**Intervalles**
Différence des moyennes $\mu_a - \mu_b$ avec $n_a \geq 30$ et $n_b \geq 30$	$\left[m_a - m_b - 1{,}96\sqrt{\frac{s_a^2}{n_a} + \frac{s_b^2}{n_b}}\,; m_a - m_b + 1{,}96\sqrt{\frac{s_a^2}{n_a} + \frac{s_b^2}{n_b}}\right]$
Différence des moyennes $\mu_a - \mu_b$ avec $n_a < 30$ ou $n_b < 30$	$\left[m_a - m_b - t_{0,025;ddl}\sqrt{\frac{s^2}{n_a} + \frac{s^2}{n_b}}\,; m_a - m_b + t_{0,025;ddl}\sqrt{\frac{s^2}{n_a} + \frac{s^2}{n_b}}\right]$ ddl = $n_a + n_b - 2$; s = $\sqrt{\frac{(n_a-1){s_a}^2 + (n_b-1){s_b}^2}{n_a+n_b-2}}$
Taille d'effet δ	$[g - 1{,}96 \times s_g;\ g + 1{,}96 \times s_g]$ avec $g = \frac{m_a - m_b}{s} \times \omega$, s = $\sqrt{\frac{(n_a-1){s_a}^2 + (n_b-1){s_b}^2}{n_a+n_b-2}}$ $s_g = \sqrt{\frac{n_a+n_b}{n_a \times n_b} + \frac{g^2}{2(n_a+n_b)}} \times \omega$; $\omega = 1 - \frac{3}{4(n_a+n_b)-9}$
Taille d'effet moyenne réelle	$[ES - 1{,}96 \times S_{ES};\ ES + 1{,}96 \times S_{ES}]$ Avec $ES = M$ ou $ES = M^*$ (voir annexe 10)

Annexe 7. Les formules du What Works Clearinghouse

Les formules du WWC sont parfois légèrement différentes de celles qui sont issues du livre de BORENSTEIN (2009) qui nous a servi de référence ici.

Le **calcul de la variance de la taille d'effet** pour une étude est donné ci-dessous :

$$var_g = \left[\frac{n_a + n_b}{n_a \times n_b} + \frac{g^2}{2(n_a + n_b)}\right] \times \omega^2$$

Par rapport à la formule proposée par BORENSTEIN (2009), le g de Hedges a remplacé le d de Cohen[a].

Pour évaluer la **significativité statistique de $\boldsymbol{g}$**, la taille d'effet d'une étude, le WWC calcule la statistique t[b] et de la valeur$-p$ associée avec

$$t = \frac{g}{\sqrt{\frac{n_a + n_b}{n_a \times n_b} + \frac{g^2}{2(n_a + n_b)}}}$$

On reconnait au dénominateur la racine carrée de la variance de g avec omission du facteur correctif ω.

Dans la première version du WWC Procedures Handbook, le WWC propose de ne pas corriger la taille d'effet pour **cluster** et calcule une variance corrigée de la façon suivante :

$$v_{corr} = w^2 \times \left\{\left[\frac{1}{N_a} + \frac{1}{N_b}\right](1 + (n-1)\rho) + g^2 \frac{(N-2)(1-\rho)^2 + n(N-2n)\rho^2 + 2(N-2n)\rho(1-\rho)}{2(\boldsymbol{N-2})[(N-2) - 2(n-1)\rho]}\right\}$$

Quelques mois plus, tard, dans un document non daté, ils proposent de corriger la taille d'effet et donne une nouvelle formule pour calculer la variance :

$$g_{corr} = g \times \sqrt{1 - \frac{2(n-1)\rho}{N-2}}$$

$$v_{corr} = w^2 \times \left\{\left[\frac{1}{N_a} + \frac{1}{N_b}\right](1 + (n-1)\rho) + g^2 \frac{(N-2)(1-\rho)^2 + n(N-2n)\rho^2 + 2(N-2n)\rho(1-\rho)}{2[(N-2) - 2(n-1)\rho]^{\boldsymbol{2}}}\right\}$$

[a] Le WWC m'a confirmé que c'était bien la formule utilisée par leur chercheur.

[b] Les test Z est ici remplacé par un test de Student, habituellement utilisé de nos jours.

Significativité statistique dans le cas de cluster : Test t
Le What Works Clearinghouse propose de calculer une statistique t en deux étapes :

Étape 1 : calcul sans correction

$$t = \frac{g}{\sqrt{\frac{N_a + N_b}{N_a \times N_b} + \frac{g^2}{2(N_a + N_b)}}}$$

Étape 2 : calcul de la statistique t corrigé en cas d'échantillonnage par classe

$$t_{corr} = t \times \sqrt{\frac{(N-2) - 2(\frac{N}{M} - 1)\rho}{(N-2)(1 + \left(\frac{N}{M} - 1\right)\rho)}}$$

Remarque : le facteur correctif multiplicatif est égal à 1 si $\rho = 0$ ou si $n = 1$

On utilisera alors un degré de liberté corrigé pour les tests statistiques

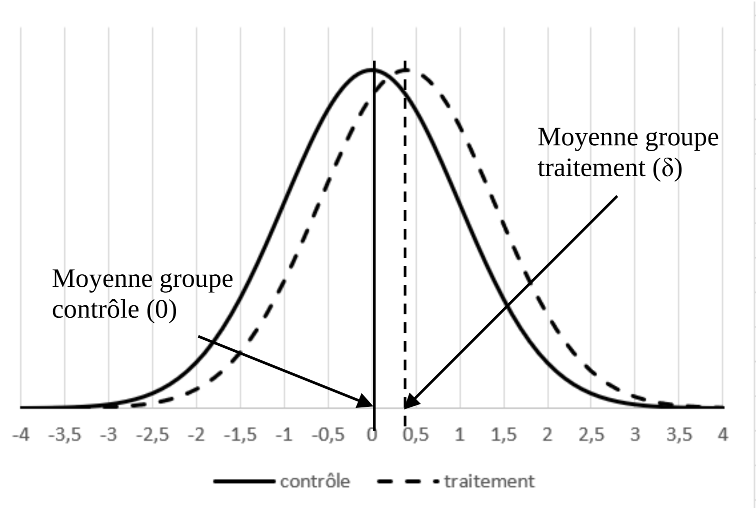
$$ddl_{corr} = \frac{\left[(N-2) - 2\left(\frac{N}{M} - 1\right)\rho\right]^2}{(N-2)(1-\rho)^2 + \frac{N}{M}\left(N - 2\frac{N}{M}\right)\rho^2 + 2\left(N - 2\frac{N}{M}\right)\rho(1-\rho)} \qquad (\mathbf{7.1})$$

Remarques :

1. $\frac{N}{M} = n$.
2. Si $n = 1$ ou $\rho = 0$, alors on retrouve bien $ddl_{corr} = N - 2$.

Annexe 8. Les interprétations du calcul de la taille d'effet d'un traitement

Les variables aléatoires scores traitement et scores contrôle



Soit X_a la variable aléatoire « prélever au hasard un score dans le groupe traitement $\boldsymbol{a}$ » et X_b la variable aléatoire « prélever au hasard un score dans le groupe contrôle $\boldsymbol{b}$ ». On suppose que les scores sont normalement distribués autour de leur moyenne $\mu_a$et μ_b avec le même écart-type σ. On note δ la taille de l'effet du traitement au niveau de la population (estimé par le g de Hedges par exemple). On définit deux variables aléatoires Z_a et Z_b de la façon suivante :

$$Z_a = \frac{X_a - \mu_b}{\sigma} \quad ; \quad Z_b = \frac{X_b - \mu_b}{\sigma}$$

Alors d'après les propriétés des variables aléatoires, on peut montrer que
Z_a suit une loi normale de paramètres $\mu_a = \delta$ et 1.
Z_b suit une loi normale de paramètres $\mu_b = 0$ et 1.

Les indices de Cohen[a]

Plusieurs des indicateurs présentés ci-dessous utilisent l'un des 3 indicateurs utilisés par Cohen : U_1, U_2 et U_3. Il est plus facile de les comprendre quand on se base sur une représentation graphique.

L'indice U_1 de Cohen est la proportion que l'aire des deux courbes non recouvertes l'une par l'autre, représente par rapport à l'ensemble de la surface des deux courbes réunies. Si les courbes sont totalement disjointes, alors $U_1 = 100\%$. Si les courbes sont confondues, alors $U_1 = 0\%$.

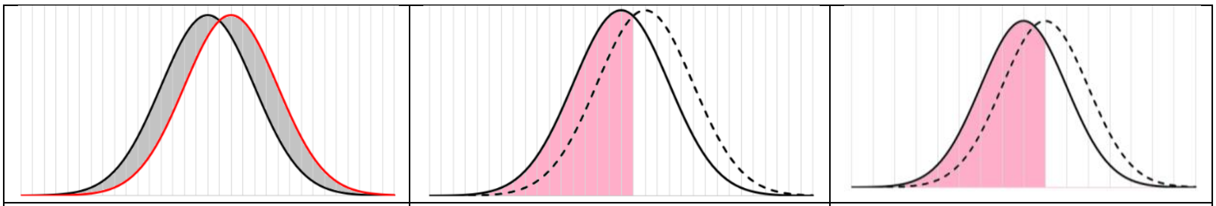
$$U_1 = \frac{2 \times p\left(Z_b < \frac{\delta}{2}\right) - 1}{p(Z_b < \frac{\delta}{2})}$$

L'indice U_2 de Cohen est la proportion que les scores du groupe contrôle inférieures à la moitié de la taille d'effet représente par rapport à l'ensemble des scores de ce groupe. Elle est égale à 100% quand les courbes sont disjointes, et 50% quand les courbes sont confondues.

$$U_2 = p\left(Z_b < \frac{\delta}{2}\right)$$

[a] COOPER H. (2009)

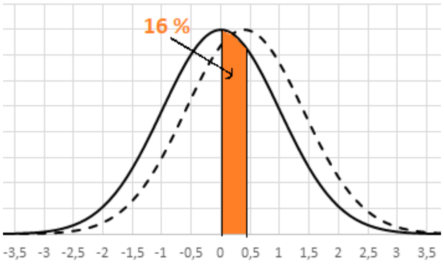
L'indice U_3 de Cohen est la proportion des scores dans le groupe contrôle qui sont inférieurs à δ, soit
$U_3 = p(Z_b < \delta)$.



Indice U_1 (entre 0 à 100%)	Indice U_2 (entre 50 et 100%)	Indice U_3 (entre 50 et 100%)

On a
$$U_1 = \frac{2U_2 - 1}{U_2} \quad ; \quad U_2 = \frac{1}{2 - U_1}$$

<u>L'indice $\boldsymbol{IA}$ du WWC</u>
Il est construit à partir de l'indice U_3 de Cohen. IA $= U_3 - 50\%$ et donc
IA = $p(Z_b < \delta) - 0{,}5 = p(0 < Z_b < \delta)$.



Cas valeurs peuvent également être lues dans le tableau ci-dessous. Par exemple, quand ES= 0,25 = 0,2 + 0,05 alors IA = 9,9 ; quand ES = 0,4 alors IA = 15,5

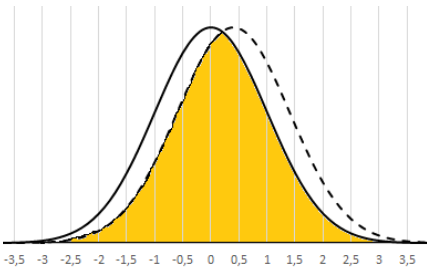
ES	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0	0,4	0,8	1,2	1,6	1,99	2,39	2,79	3,19	3,59
0,1	3,98	4,38	4,78	5,17	5,57	5,96	6,36	6,75	7,14	7,53
0,2	7,93	8,32	8,71	9,1	9,48	9,87	10,3	10,6	11	11,4
0,3	11,8	12,2	12,6	12,9	13,3	13,7	14,1	14,4	14,8	15,2
0,4	15,5	15,9	16,3	16,6	17	17,4	17,7	18,1	18,4	18,8
0,5	19,1	19,5	19,8	20,2	20,5	20,9	21,2	21,6	21,9	22,2
0,6	22,6	22,9	23,2	23,6	23,9	24,2	24,5	24,9	25,2	25,5
0,7	25,8	26,1	26,4	26,7	27	27,3	27,6	27,9	28,2	28,5
0,8	28,8	29,1	29,4	29,7	30	30,2	30,5	30,8	31,1	31,3
0,9	31,6	31,9	32,1	32,4	32,6	32,9	33,1	33,4	33,6	33,9
1	34,1	34,4	34,6	34,8	35,1	35,3	35,5	35,8	36	36,2

Correspondance entre taille d'effet (ES) et indice d'amélioration.

Recouvrement des deux courbes

On calcule la proportion que la surface commune aux deux courbes représente par rapport à la surface de la courbe du groupe contrôle qui est égale à 1 par définition (ou par rapport à la surface de la courbe du groupe traitement, cela revient au même).
Cette surface commune est égale au double de la surface comprise sous la courbe du groupe contrôle et à droite de la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par le point de coordonnées $(\frac{\delta}{2}\ ; 0)$.
Cet indice (noté I dans ce qui suit) est dérivé de l'indice U_1 de Cohen. On a

$$I = \frac{2 - 2U_1}{2 - U_1} = 2 - 2U_2 = 2 - 2 \times p\left(Z_b < \frac{\delta}{2}\right)$$

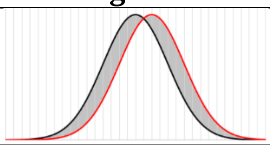
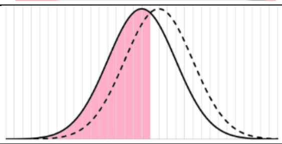
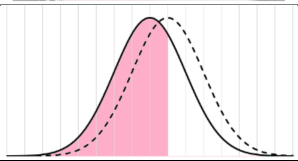


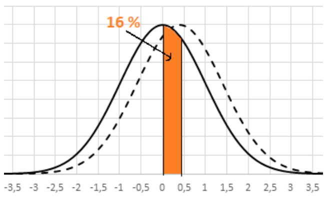
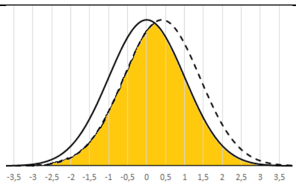
The Common Langage Effect (CLE) Size

C'est la probabilité qu'un score choisi au hasard dans le groupe $\boldsymbol{a}$ soit supérieure au score choisi au hasard dans le groupe $\boldsymbol{b}$. Elle est donc égale à la probabilité que la différence d'un score choisi au hasard dans le groupe $\boldsymbol{a}$ et d'un score choisi au hasard dans le groupe $\boldsymbol{b}$ soit positive.
$p(Z_b > Z_a) = p(Z_b - Z_a > 0)$.
$Z_b - Z_a$ suit une loi normale de paramètres $\delta - 0 = \delta$ et $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
Donc $Z_b - Z_a$ suit une loi normale de paramètres δ et $\sqrt{2}$.

On peut également centrer et réduire $Z_b - Z_a$. Dans ce cas, la variable centrée réduite est $Z = \frac{Z_b - Z_a - \delta}{\sqrt{2}}$ qui suit donc une loi normale de paramètres 0 et 1.
De plus $Z_b - Z_a = Z \times \sqrt{2} + \delta$
donc $p(Z_b - Z_a > 0) = p(Z \times \sqrt{2} + \delta > 0) = p(Z > -\delta/\sqrt{2}) = p(Z < \delta/\sqrt{2})$

Bilan des indicateurs

Indices	Figures	Formules	Pour $\boldsymbol{\delta = 0,4}$	
U_1		$\dfrac{2 \times p\left(Z_b < \frac{\delta}{2}\right) - 1}{p(Z_b < \frac{\delta}{2})}$	$\dfrac{2 \times p(Z_b < 0{,}2) - 1}{p(Z_b < 0{,}2)}$	0,274
U_2		$p\left(Z_b < \frac{\delta}{2}\right)$	$p(Z_b < 0{,}2)$	0,5793
U_3		$p(Z_b < \delta)$	$p(Z_b < 0{,}4)$	0,6554

IA		$p(Z_b < \delta) - 0{,}5$	$p(Z_b < 0{,}4) - 0{,}5$	0,1554
Recouvrement des deux courbes		$2 - 2 \times p\left(Z_b < \frac{\delta}{2}\right)$	$2 - 2 \times p(Z_b < 0{,}2)$	0,8414
Common Langage Effect		$p(Z < \delta/\sqrt{2})$	$p(Z < 0{,}283)$	0,6103

Annexe 9. Utilisation d'Excel

La version utilisée ici est Excel 2010 pour Windows 10. Dans ce qui suit, $N = n_a + n_b$ (effectif total).

Les calculs de base

Description	**Notation formulaire et exemple 6**	**=Fonction Excel(plage de cellules)**
Effectif d'une série de données	n	=NB(…)
Somme	S	=SOMME(…)
Somme des carrés des écarts	SCE	=SOMME.CARRES.ECARTS(…)
Somme des produits	SP	=SOMMEPROD(… ;…)
Moyenne	m	=MOYENNE(…)
Variance d'une population	σ^2	=VAR.P.N(…)
Variance d'un échantillon	s^2	=VAR.S(…)
Écart-type d'une population	σ	=ECARTYPE.PEARSON(…)
Écart-type d'un échantillon	s	=ECARTYPE.STANDARD(…)

Tracer un histogramme

Excel utilise le terme *histogramme* pour désigner des diagrammes en rectangles.
Dans un premier temps il faut regrouper les données dans un tableau en calculant des fréquences pour les classes choisies.

Prenons comme exemple une série de 13 nombres entiers compris entre 1 et 7 (colonne A). On souhaite regrouper les données par classes d'amplitude 2 (colonne B) et calculer l'effectif de chaque classe (colonne C). On sélectionne les cellules C3 à C8 (cette dernière affichera le nombre de données supérieures à 7 s'il y en avait), ensuite dans la barre de formule on saisit =FREQUENCE(A2:A13;C3:C7), puis CTRL + MAJ + ENTREE pour valider la saisie. Les effectifs apparaissent dans la colonne C.
Pour obtenir des fréquences dans la colonne D, il suffit de diviser chaque nombre de données par classe par le nombre total de données (ici 13). On aurait pu également saisir la formule =FREQUENCE(A2:A13;C3:C7)/13 (sans oublier de valider avec CTRL + MAJ + ENTREE).
Pour obtenir des densités de fréquence dans la colonne D, il suffit de diviser par le produit du nombre de données par la largeur des classes (ici 13*2).

	A	B	C	D
1	Mesures	Classes	Effectifs	Fréquences
2	1			
3	2	0	0	0
4	3	2	5	0,3846154
5	5	4	5	0,3846154
6	1	6	2	0,1538462
7	6	8	1	0,0769231
8	7		0	0
9	3			
10	4			
11	2			
12	1			
13	3			
14	3			

Remarques
Le nombre 0 saisi dans B3 correspond à la classe « nombres inférieurs strictement à 0 ». Le nombre 2 saisi dans la cellule B4 correspond à la classe « nombres inférieurs ou égaux à 2 et supérieurs strictement à 0 ». Et ainsi de suite.

Dans un second temps, on trace l'histogramme correspondant (*insertion →graphiques recommandés*).
Il existe une autre façon de procéder, en installant le complément *Utilitaire d'analyse* (dans l'onglet *Données*). Mais dans ce cas, ce sont les effectifs qui sont placés en ordonnée.

Tracer un graphique en forêt (graphique avec barres d'erreur)

Prenons comme exemple la figure 35 issue des données du tableau 17. On sélectionne les cellules des colonnes B et C (tableau ci-contre), puis on insère un nuage de points. Pour ajouter des barres d'erreurs (nos intervalles de confiance), sélectionner votre graphique, puis dans l'onglet *Création de graphique, Disposition du graphique, Ajouter un élément graphique, Barres d'erreurs, Autres options de barres d'erreur.* Dans la fenêtre *Format des barres d'erreurs*, sélectionner *Personnalisé* dans *Marge d'erreur* (sélectionner dans votre graphique les barres d'erreur horizontales si nécessaire, les barres d'erreur verticales seront supprimées en cliquant dessus) et cliquer sur *Spécifier une valeur*. Dans *Valeur d'erreur positive* comme dans *Valeur d'erreur négative* sélectionner les valeurs de la colonne D (les valeurs sont égales à 1,96*erreur standard).

	A	B	C	D
1	République Tchèque	499	1	5,6
2	France	495	2	4,8
3	Royaume-Uni	494	3	6,5
4	Italie	485	4	4,0
5	OCDE	494	0	1,0

On supprime les étiquettes de l'axe verticale, on modifie l'apparence des marques si besoin.

Pour insérer un trait vertical représentant la moyenne de l'OCDE on peut ajouter une série de données dont les abscisses sont toutes égales à 494 et les ordonnées vont de -1 à 5, puis avec les outils de mise en forme on supprime les marques et on ne fait apparaitre que la courbe.

Simuler une expérience aléatoire

Pour obtenir un nombre entier aléatoire compris entre 1 et 5 on saisit
= ALEA.ENTRE.BORNES(1;5)

Pour simuler un tirage aléatoire avec des probabilités non égales on choisit un élément dans une liste. Pour l'exemple ci-contre on saisit
=CHOISIR(ALEA.ENTRE.BORNES(1;5);1;1;2;2;2)

scores	1	2
probabilités	2/5	3/5

Modifier une feuille de calcul entraine des modifications pour les valeurs calculées par ces fonctions. Pour figer ces dernières, dans l'onglet **Formules** puis dans **Options de calculs** sélectionner **Manuel**. Mais sauvegarder une feuille modifiée entraînera tout de même de nouvelles modifications. La solution reste alors de copier coller les valeurs dans une autre feuille en sélectionnant **Collage spécial**, **Valeurs**.

Droite de régression et coefficient de détermination d'un nuage de point

Sélectionner votre graphique, puis dans l'onglet *Création de graphique, Disposition du graphique, Ajouter un élément graphique, Courbe de tendance, Autres options de la courbe de tendance*, cocher *Linéaire, Afficher l'équation sur le graphique, Afficher le coefficient de détermination (R^2) sur le graphique*

Pour calculer la pente de la droite de régression, on saisit
=PENTE(y;x)
avec y les scores posttest et x les scores prétest (sélectionner les plages de cellules).

Pour calculer le coefficient de détermination, on saisit
=COEFFICIENT.DETERMINATION(y;x)

Représenter graphiquement une loi normale, une loi de Student

Pour calculer l'image d'une série de nombres placés dans la colonne A par une loi normale de paramètres définis, on saisit
=LOI.NORMALE.N(A2;C1;D1;FAUX)
avec A2 la première valeur dont on souhaite calculer l'image par la fonction de densité associée, C1 la moyenne, D1 l'écart-type. L'argument FAUX permet de ne pas avoir d'effectifs cumulés.

On procède de la même façon pour la loi normale centrée réduite (de paramètres 0 et 1) :
=LOI.NORMALE.STANDARD.N(A2;FAUX)

On procède de la même façon pour la loi de Student en saisissant
=LOI.STUDENT.N(A2;C1;FAUX)
avec C1 le degré de liberté des deux échantillons (N-2). À nouveau l'argument FAUX permet de ne pas avoir d'effectifs cumulés.

On trace ensuite la courbe représentative (*insertion → graphiques → nuage de points)*

Score-z

Pour calculer la proportion de valeurs inférieures à un score-z donné dans A2 saisir :
=LOI.NORMALE.STANDARD.N(A2;VRAI)

Pour calculer la proportion de valeurs supérieures à un score-z donné dans A2 saisir :
=1-LOI.NORMALE.STANDARD.N(A2;VRAI)

Tests statistiques

Pour calculer la valeur critique dans un **test-z** bilatéral, saisir
=LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE.N(1-A1/2)
avec A1 le risque de première espèce (souvent 0,05)

Pour calculer la valeur-p quand on connait la valeur z observée dans un **test-z** bilatéral, saisir
=(1-LOI.NORMALE.STANDARD.N(A2;VRAI))*2
avec A2 la valeur de z observée.

Pour calculer la valeur critique dans un test de **Student** bilatéral, saisir
=LOI.STUDENT.INVERSE.BILATERALE(A1;A2)
avec A1 le risque de première espèce (souvent 0,05) et A2 le degré de liberté des deux échantillons (N-2)

Pour calculer la valeur-p quand on connait la valeur t observée dans un test de **Student**, saisir au choix

=LOI.STUDENT.BILATERALE(A1;A2) avec A1 la valeur de t observée et A2 le degré de liberté (N-2)	=T.TEST(A1:An;B1:Bn;2;2) avec A1:An les n valeurs du groupe **a**, B1:Bn les n valeurs du groupe **b** (sélectionner les plages de cellules).

Pour calculer la valeur critique dans un test de **Fisher-Snédécor**, saisir
=INVERSE.LOI.F.DROITE(A1;A2;A3)
avec A1 le risque de première espèce (souvent 0,05), A2 le degré de liberté des échantillons (1 dans notre cas), A3 le degré de liberté de l'ensemble des données (N-2 dans une ANOVA ou N-3 dans une ANCOVA)

Pour calculer la valeur$-p$ dans un test de **Fisher-Snédécor**, saisir
=LOI.F.DROITE(A1;A2;A3)
avec A1 la valeur de de F observée, A2 le degré de liberté des échantillons (1 dans notre cas), A3 le degré de liberté de l'ensemble des données (N-2 dans une ANOVA ou N-3 dans une ANCOVA)

Avec le complément *Utilitaire d'analyse* (dans l'onglet *Données*), les résultats des tests de **Student** (*test d'égalité des espérances : deux observations de variances égales*) et des **test F** (*analyse de variance : un facteur*) peuvent être automatiquement générés.

Pour calculer la valeur-p dans un test du **Khi** 2 quand on connait la valeur observée de la statistique
=LOI.KHIDEUX.DROITE(A1; A2)
avec A1 la valeur observée de la statistique et A2 le degré de liberté.

<u>Indice U3 de Cohen</u>
Pour calculer le pourcentage d'élèves du groupe contrôle dont le score est inférieur à la moyenne du groupe traitement à partir de la taille d'effet calculée en A2, saisir
=LOI.NORMALE.STANDARD.N(A2;VRAI)*100

<u>Indice d'amélioration (IA) du WWC</u>
Pour calculer la progression d'un élève moyen du groupe contrôle dans la cohorte s'il avait subi le traitement à partir de la taille d'effet calculée en A2, saisir :
=LOI.NORMALE.STANDARD.N(A2;VRAI)*100-50

<u>Recouvrement des courbes</u>
Pour calculer le pourcentage de recouvrement des deux courbes (contrôles et traitement) à partir de la taille d'effet calculée en A2, saisir :
=2*LOI.NORMALE.STANDARD.N(-A2/2;VRAI)

<u>Langage courant pour taille d'effet</u>
Pour calculer la probabilité qu'un élève prélevé au hasard dans le groupe traitement ait un score supérieur à un élève prélevé au hasard dans le groupe contrôle à partir de la taille d'effet calculée en A2, saisir au choix :
=LOI.NORMALE.STANDARD.N(A2/2^0,5;VRAI)
=1-LOI.NORMALE.N(0 ;A2 ; 2^0,5; VRAI).

Bilan loi normale

On a	On calcule	Pour
a	**b** = LOI.NORMALE.STANDARD.N(**a** ; FAUX)	Tracer la courbe
a	**d** + **e** = LOI.NORMALE.STANDARD.N(**a** ; VRAI)	Calculer la proportion des valeurs inférieures à un score-z
a	**c** = 1- LOI.NORMALE.STANDARD.N(**a** ; VRAI)	Calculer la proportion des valeurs supérieures à un score-z
c + d	**a** = LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE.N(1-(**c+d**)/2)	Calculer la valeur critique dans un test-z bilatéral, z_α
a	**c** + **d** = 2*(1- LOI.NORMALE.STANDARD.N(**a** ; VRAI))	Calculer la valeur$-p$ dans un test-z bilatéral

=LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE.N(0,975)

Bilan loi de Student

On a	On calcule	Pour
a	**b** = LOI.STUDENT.N(**1** ; ddl ; FAUX)	Tracer la courbe
c + d	**a** = LOI.STUDENT.INVERSE.BILATERALE(**c+d**; ddl)	Calculer la valeur critique dans un test-t bilatéral
a	**c** + **d** = LOI.STUDENT.BILATERALE(**a** ; ddl)	Calculer la valeur-p dans un test-t bilatéral