Aider les élèves en mathématique dès l’école primaire

Guide des pratiques du What Works Clearinghouse

Aider les élèves en mathématique dès l’école primaire

Guide des pratiques du **What Works Clearinghouse**

De la même auteure

- *Une année sur un bateau : une année de la vie d'une classe de 3ème*, 2017, L'Harmattan (publié sous le pseudonyme de Sylvie Captain)
- *Vivre la relation avec son bébé : allaiter, dormir, porter*, 2005, Chroniques sociales
- *Allaitement maternel et proximité mère-bébé*, 2003, Erès
- *Allaitement maternel*, revue Spirale (n°27), septembre 2003, Erès
- *Dormir avec son bébé*, 2003, L'Harmattan
- *Au sein du monde*, 2001, L'Harmattan

Sommaire

Note concernant la traduction

Ce texte est la traduction de la première partie du guide des pratiques *Assisting Students Struggling with Mathematics: Intervention in the Elementary Grades* publié en mars 2021 par le What Works Clearinghouse (WWC). Les annexes donnant des informations techniques, notamment sur la réalisation de ce guide des pratiques, n'ont pas été traduites. Elles ont fait l'objet d'une analyse partielle dans *Comment aider les élèves en difficulté en mathématiques ? Les réponses de Campbell et du What Works Clearinghouse (WWC)* (ROQUES, 2021, www.mathadoc.fr).

Les guides des pratiques du WWC sont librement téléchargeables sur leur site internet Find What Works (https://ies.ed.gov/ncee/wwc/) et leur traduction est libre de droits.

Les USA sont un État fédéral, et cette structure politique a de nombreuses implications sur l'organisation de l'enseignement (par exemple, le découpage de cet État en districts). Certains passages concernant cette organisation spécifique ont été volontairement laissés de côté. Pour faciliter la lecture de cette traduction par des Français, le niveau des élèves a été traduit (ainsi les élèves de 4^{e} grade américains sont devenus des élèves de CM1). Enfin l'enseignement des mathématiques aux USA présente parfois quelques différences avec l'enseignement de cette discipline en France ; cela concerne les méthodes de calcul mais aussi les sujets mathématiques traités. Certains exemples ont été modifiés de façon à être compris par des lecteurs français et les problèmes reposant sur la notion de ratio ont été traduits ici en utilisant le concept de proportionnalité.

Cette traduction a été rédigée par Nathalie ROQUES et ne saurait en aucun cas engager la responsabilité du What Works Clearinghouse.

Introduction

Les résultats du *National Assessment of Educational Progress* (NAEP) indiquent que les performances des élèves qui sont en difficulté en mathématiques évoluent moins favorablement que les performances des autres élèves. Les résultats des élèves situés au 10e centile ont nettement diminué entre 2009 et 2019, alors que dans le même temps, les résultats des élèves les plus performants ont significativement augmenté[1]. Les performances des élèves situés au 25e centile sont, elles, restées stables. Ces données suggèrent que les écarts entre élèves ayant des difficultés à apprendre les mathématiques et les autres élèves ne font que se renforcer dans le temps.

Des recherches récentes portant sur des **interventions** (voir encadré) ont démontré qu'elles permettaient d'élever le niveau de connaissance des élèves qui éprouvent des difficultés en mathématiques. Ce guide des pratiques, élaboré par le What Works Clearinghouse™ (WWC) en collaboration avec un groupe d'experts (encore dénommé ici le panel), traduit cette recherche récente sur les interventions en mathématiques, en recommandations concrètes compréhensibles par les enseignants qui peuvent ainsi les mettre en pratique lorsqu'ils enseignent lors de ces interventions à l'école primaire. Deux lois fédérales, l'*Elementary and Secondary Education Act* (ESEA)[2] et l'*Individuals with Disabilities Education Act* (IDEA), imposent de mettre en œuvre des pratiques pédagogiques étayées par des preuves. Les recommandations présentées dans ce guide s'inscrivent dans ce contexte en traduisant l'ensemble de ces preuves de haute qualité en pratiques exploitables par les enseignants.

Bien que ce guide soit une mise à jour du guide publié en 2009, *Assisting Students Struggling with Mathematics: Response to Intervention (RtI) for Elementary and Middle Schools (Aider les élèves en difficulté en mathématiques : le soutien scolaire en primaire et au collège)*[3], sa portée est plus restreinte, car il ne concerne que les pratiques et les principes sous-jacents aux interventions efficaces mises en place en direction des élèves de la maternelle au CM2 et travaillant en petits groupes durant des séances de soutien. Le guide précédent proposait un aperçu général du dispositif de soutien multi-niveaux (*multi-tiered systems of support*, MTSS) en mathématiques (voir encadré). Ce guide concernait également les élèves du collège.

Dispositif de soutien multi-niveaux	**Interventions**
Dispositif reposant sur trois axes : • Un enseignement étayé par des données probantes, • Une évaluation régulière des compétences et des progrès des élèves, • Des séances de soutien (ou encore interventions) pour les élèves en difficulté ainsi identifiés. Ce dispositif reprend les grandes lignes de la réponse à l'intervention (*Response to Intervention*, RtI).	Séances de soutien pour des élèves en difficulté, la plupart du temps réunis en petits groupes (5 à 6 élèves maximum) et en dehors des heures de cours en classe entière, ou bien sous la forme d'un soutien individuel. Élément clé du dispositif de soutien multi-niveaux.

Voir le glossaire pour la liste complète des mots-clés utilisés dans ce guide et leur définition. Ces mots-clés sont écrits en **gras** à leur première apparition dans le texte.

Nous avons restreint l'objectif de cette mise à jour pour trois raisons. Premièrement, le dispositif de soutien multi-niveaux est aujourd'hui plus largement mis en œuvre qu'à l'époque où le guide original a été publié[4], et l'analyse initiale dont l'objectif principal était d'optimiser la mise en œuvre de ce dispositif n'était plus nécessaire. Par conséquent, des sujets tels que l'évaluation des progrès, le dépistage des élèves en difficulté et les actions ciblées sur la motivation des élèves, bien qu'importants, ne sont pas inclus dans ce nouveau guide.

Deuxièmement, la recherche sur les interventions en mathématiques s'est considérablement développée ces dernières années et nous sommes donc maintenant en mesure de nous concentrer sur l'enseignement fondé sur des données probantes lors des interventions dont bénéficient les élèves à risque ou souffrant de difficultés scolaires. Historiquement, la recherche sur les interventions en mathématiques a reçu beaucoup moins d'énergie et de financement que la recherche interventionnelle en lecture. Mais au cours des 10 à 15 dernières années, cet écart s'est réduit et un nombre important d'études expérimentales ont été menées qui constituent une base de données probantes sur les interventions efficaces dans ce domaine qui nous intéresse. De plus, les interventions se sont concentrées sur des sujets plus complexes, et sur des thèmes mathématiques essentiels faisant partie intégrante des programmes scolaires afin que tous les élèves puissent profiter du même contenu enseigné en classe entière et améliorer leur compréhension des mathématiques.

Troisièmement, nous avons limité le champ d'application aux élèves scolarisés à l'école primaire car la recherche s'est principalement concentrée sur ces niveaux d'étude. Le panel a estimé que limiter la portée du guide à ces niveaux d'étude donnait plus de poids à leurs recommandations.

Les pratiques décrites par les six recommandations présentées par ce guide caractérisent les interventions efficaces en mathématiques, c'est-à-dire des séances où les élèves sont rassemblés en petits groupes, voire des séances de soutien individuelles. Ces pratiques permettent aux élèves d'améliorer leurs performances en mathématiques. La recommandation 1 (Enseignement systématique) donne les caractéristiques spécifiques d'un enseignement efficace durant ces interventions dont elle constitue l'épine dorsale. Les recommandations 2 à 6 se concentrent sur des pratiques plus spécifiques. Les recommandations 2 et 4 (langage mathématique et droites numériques) s'appuient sur des preuves récentes et soutiennent des propositions de changements dans les programmes depuis la publication de la version de 2009[5]. La recommandation 3 (représentations), la recommandation 5 (**problèmes verbaux**) et la recommandation 6 (activités limitées dans le temps) étaient déjà présentes dans le guide publié en 2009. Mais dans cette mise à jour, elles sont présentées de façon différente en s'appuyant sur de nouvelles preuves et en proposant de nouvelles idées pour améliorer les interventions.

Utiliser des données probantes pour élaborer les recommandations

Ce guide des pratiques propose six recommandations basées sur un ensemble de recherches de grande qualité portant sur des interventions en mathématiques. Chaque recommandation donne des éléments caractéristiques concernant les interventions et/ou les pratiques pédagogiques recommandées, avec des conseils sur la façon de les mettre en œuvre, des conseils sur la façon de surmonter les éventuels obstacles, et un bref résumé des résultats de la recherche qui appuie la recommandation.

Après avoir examiné l'ensemble des preuves, le groupe d'experts et le WWC qui a rédigé ces recommandations leur ont attribué à chacune un niveau de preuve. Les recommandations et leurs niveaux de preuve sont présentés dans le **tableau 1**.

Les trois niveaux de preuve

Solide : des preuves cohérentes issues d'études conformes aux normes WWC et qui montrent que les pratiques améliorent les résultats pour une large population d'élèves.

Modéré : certaines preuves issues d'études conformes aux normes WWC montrent que les pratiques améliorent les résultats, mais il peut y avoir une ambiguïté quant au lien direct entre les pratiques et les résultats ou sur leur généralisation à des populations d'élèves diverses.

Minimal : les preuves ne sont pas issues d'études conformes aux normes WWC ou sont incohérentes, mais le panel a décidé d'inclure la recommandation car l'intervention s'appuie sur des bases théoriques fortes ; il est aussi possible que cette recommandation n'ait pas encore été étudiée ou qu'elle soit difficile à étudier d'une façon expérimentale rigoureuse.

Des informations plus détaillées peuvent être trouvées dans les annexes A et C (non traduites).

Tableau 1. Recommandations et niveaux de preuve correspondants

Recommandations pratiques	**Niveau de preuve**		
	Minimal	**Modéré**	**Solide**
1. Enseignement systématique : dispenser un enseignement systématique pendant l'intervention pour développer la compréhension des **sujets mathématiques** par les élèves**.**			✓
2. Langage mathématique : enseigner un langage mathématique clair et concis et soutenir la pratique de ce langage par les élèves pour leur permettre de communiquer efficacement leur compréhension des **concepts mathématiques.**			✓
3. Représentations : utiliser un ensemble bien choisi de représentations concrètes et semi-concrètes pour permettre aux élèves d'apprendre les concepts et les procédures mathématiques.			✓
4. Droite numérique : utiliser la droite numérique pour faciliter l'apprentissage des concepts et des procédures mathématiques, favoriser la compréhension des éléments du programme et préparer les élèves à des mathématiques avancées.			✓
5. Problèmes verbaux : proposer aux élèves un enseignement spécifique portant sur la résolution de problèmes verbaux de manière à favoriser leur compréhension des mathématiques et leur capacité à appliquer des concepts mathématiques.			✓
6. Activités en temps limité : proposer régulièrement des activités en temps limité pour améliorer la fluence mathématique des élèves.			✓

Qui pourrait trouver ce guide utile ?

Ce guide est conçu pour être utilisé par les enseignants qui organisent des interventions en mathématiques en direction des élèves en difficulté. Ce groupe professionnel comprend des enseignants en mathématiques, des éducateurs spécialisés, des spécialistes en mathématiques et des formateurs en mathématiques. Les recommandations décrivent des pratiques fondées sur des données probantes qui peuvent aider les enseignants à adapter leurs approches pédagogiques et/ou leurs programmes d'intervention en mathématiques pour répondre aux besoins de leurs élèves, c'est-à-dire des élèves ayant des difficultés en mathématiques (ou à risque d'en éprouver) et qui peuvent également avoir des problèmes de lecture, de langage, d'attention, de comportement, de mémoire de travail ou des difficultés liées à la vitesse de traitement. Les conseils proposés par ces recommandations fondées sur des données probantes peuvent également être utiles au personnel de l'établissement ou des structures administratives concernées par l'adoption et l'application de programmes d'interventions dans leurs écoles, et aux parents pour qu'ils sachent comment leurs enfants seront aidés en mathématiques.

Comment utiliser ce guide des pratiques

Le panel suggère que les pratiques recommandées dans ce guide soient mises en application dans leur ensemble afin de permettre aux élèves d'obtenir les meilleurs résultats possible. Les utilisateurs de ce guide sont invités à mettre en œuvre les conseils proposés de la manière qui correspond le mieux à leur enseignement et à son contexte.

Chacune des six recommandations est présentée selon la même trame :

- En premier lieu, un résumé donne les grandes lignes des pratiques recommandées et des preuves qui leur sont associées. L'annexe C justifie leur niveau de preuve en donnant des détails sur les études utilisées.
- Des informations détaillées sur la mise en œuvre de la recommandation sont ensuite proposées aux enseignants et aux autres

éducateurs avec la description de points clés ou d'étapes importantes. Ces conseils sont éclairés par l'ensemble des études contribuant à cette recommandation, mais aussi par l'expertise et les connaissances du panel en matière d'enseignement et d'organisation des interventions en mathématiques. Des exemples concrets sont inclus qui ont comme fonction de donner au lecteur des idées pour appliquer la recommandation. Les exemples ne sont pas destinés à approuver des produits commerciaux.

- Enfin, le panel offre des conseils pour surmonter les obstacles potentiels à la mise en œuvre de la recommandation.

Recommandation 1

Recommandation 1 : enseignement systématique

Dispenser un enseignement systématique pendant l'intervention pour développer la compréhension des sujets mathématiques par les élèves

Introduction

Les interventions efficaces pour améliorer les résultats en mathématiques des élèves éprouvant des difficultés dans cette discipline partagent une caractéristique clé : la conception du **matériel pédagogique** tout comme l'enseignement dispensé sont systématiques[6]. Le terme systématique indique que les éléments pédagogiques sont conçus et organisés de manière à développer progressivement des **compétences et connaissances** clairement identifiées[7]. Le matériel pédagogique est conçu de façon à développer les sujets de manière progressive et intentionnelle, afin que l'enseignement déployé soutienne l'apprentissage des élèves[8]. Cette approche répond spécifiquement aux besoins des élèves en difficulté[9].

Les interventions conçues sur ce modèle comprennent le plus souvent un ensemble de pratiques mises en œuvre dans le but de développer et de soutenir l'apprentissage des élèves de manière stratégique[10]. Ces pratiques sont traitées dans d'autres recommandations. Par exemple, la révision et l'intégration de contenus appris précédemment ou nouvellement appris sont mentionnées dans la recommandation 5 (problèmes verbaux) ; le renforcement progressif des connaissances est illustré dans la recommandation 3 (représentations), la recommandation 4 (droites numériques) et la recommandation 5 (problèmes verbaux) ; et l'application de stratégies efficaces permettant aux élèves d'apprendre et de comprendre de nouveaux concepts et procédures est un point clé de la recommandation 2 (langage mathématique) et de la recommandation 3 (représentations). Quel que soit l'objectif de l'intervention, ces aspects de la **conception de l'enseignement** sont essentiels pour soutenir l'apprentissage des élèves.

Le WWC et le groupe d'experts ont attribué un niveau de preuve solide à cette recommandation en se basant sur 43 études portant sur l'efficacité de certaines caractéristiques concernant la conception des interventions et d'un enseignement systématique[11]. Parmi elles, trente-deux études répondent aux normes WWC sans réserve[12], et onze études répondent aux normes WWC avec réserves[13]. Voir l'annexe C pour une justification détaillée du niveau de preuve associé à la recommandation 1.

Cette recommandation met en évidence un ensemble global de caractéristiques pédagogiques qui constituent l'épine dorsale des interventions efficaces et systématiques. Ce chapitre décrit des stratégies, des exemples et des outils que les enseignants peuvent utiliser pour mettre en œuvre des interventions systématiques efficaces.

Comment mettre en œuvre la recommandation

1. Revoir et intégrer ce que les élèves ont déjà appris tout au long de l'intervention pour s'assurer qu'ils comprennent toujours les concepts et les procédures

Les experts recommandent que le contenu des interventions fasse l'objet d'un examen systématique tenant compte des concepts et/ou procédures appris précédemment. Identifiez les éléments déjà enseignés qui sont en lien avec le contenu nouveau avant d'introduire ce dernier et aidez les élèves à comprendre ce lien[14]. Présentez aux élèves des occasions de résoudre des problèmes de type familier. Au cours de cette révision, les élèves peuvent expliquer ce qu'ils savent sur un sujet, ou bien être amenés à résoudre des problèmes en travaillant soit individuellement, soit en petits groupes, soit avec un partenaire (voir la recommandation 2 sur le langage mathématique).

Présentez régulièrement une variété de problèmes qui oblige les élèves à faire la distinction entre les différents types de problèmes (voir la recommandation 5 sur les problèmes verbaux et la recommandation 6 sur les activités en temps limité). Cette pratique évite aux élèves de généraliser à l'excès les nouveaux concepts ou procédures[15]. Par exemple, une fois que la technique du regroupement a été introduite pour effectuer des soustractions avec des nombres à deux chiffres, incluez certains problèmes qui ne nécessitent pas de recourir à cette pratique afin que les élèves ne la généralisent pas à tous les problèmes. Lorsque la multiplication et la division des fractions sont introduites, continuez d'inclure des problèmes avec des additions et des soustractions de fractions traitées précédemment, tout au long de l'intervention. Ce faisant, les élèves apprennent à reconnaitre les cas où ils n'ont pas besoin de trouver une fraction équivalente comme dans le cas de la multiplication de fractions, et les situations où ils doivent le faire comme dans le cas de l'addition ou de la soustraction de fractions lorsque les dénominateurs ne sont pas les mêmes.

Les sujets mathématiques sont complexes et pratiquement tous les élèves doivent utiliser, discuter et expliquer ces sujets plusieurs fois sur une longue période de temps pour les comprendre[16]. Offrir aux élèves des occasions d'utiliser et d'expliquer des concepts ou des procédures mathématiques précédemment ou nouvellement appris tout au long du temps alloué à l'intervention. Afin que les élèves restent activement engagés durant toute l'intervention, évitez de limiter ces opportunités de discussion à la fin des séances.

2. Lors de l'introduction de nouveaux concepts ou procédures, utiliser des nombres permettant de faciliter l'apprentissage

Utilisez des nombres faciles et simples à utiliser par les élèves au début de l'intervention[17]. Lorsque vous enseignez un nouveau concept ou une nouvelle procédure, utilisez des nombres à un chiffre ou des nombres simples afin que les élèves puissent se concentrer sur le nouveau concept ou la nouvelle procédure plutôt que sur des calculs difficiles. Par exemple, lorsque vous enseignez aux élèves comment trouver des fractions équivalentes, travaillez d'abord sur les équivalences aux fractions unitaires. Commencez avec des fractions équivalentes à un demi, un tiers et un quart qui sont familières et accessibles aux élèves. Utilisez une représentation concrète ou une droite numérique (voir la recommandation 3 sur les représentations et la recommandation 4 sur les droites numériques pour plus de détails). Une représentation concrète ou une droite numérique permettent aux élèves de visualiser l'équivalence lorsqu'ils comparent deux quarts à un demi, deux sixièmes à un tiers et deux huitièmes à un quart. Lorsque les élèves ont compris le concept, ajoutez systématiquement d'autres fractions pour éviter que les élèves ne généralisent pas à l'excès en pensant que les équivalences ne s'appliqueraient qu'aux fractions unitaires.

3. Séquencer l'enseignement de sorte que les élèves apprennent les mathématiques de façon progressive

Présenter les concepts mathématiques de manière cohérente, logique et stratégique afin que le nouvel apprentissage se rapporte aux concepts enseignés précédemment. De l'avis du panel, les leçons enseignées sur des sujets isolés devraient être évitées pendant l'intervention. Au contraire, les leçons devraient être reliées entre elles au fil des jours et des séances pour conduire vers des compétences ou connaissances spécifiques. Cette **séquence d'enseignement** intentionnelle et soigneusement planifiée capitalise sur les apprentissages antérieurs et assure que les élèves ont les connaissances nécessaires pour apprendre efficacement un nouveau contenu[18].

Concentrez les leçons sur des tâches restreintes (ou sous-tâches) nécessaires à la résolution de problèmes complexes avant de toutes les rassembler. Cela peut s'appliquer à des problèmes de calcul aux procédures complexes, par exemple, avec des nombres à plusieurs chiffres, ou lorsque l'on enseigne aux élèves à comprendre et à résoudre des problèmes verbaux. De l'avis du panel, la clé de l'acquisition progressive de connaissances est de permettre aux élèves d'être performants sur des sous-tâches plus restreintes de résolution de problèmes afin qu'ils puissent ensuite les connecter pour résoudre des problèmes complexes.

Pour y parvenir, il est possible d'utiliser des **exemples résolus** pour permettre à l'élève de se concentrer sur des tâches plus limitées. Évitez stratégiquement de demander aux élèves de résoudre certaines étapes dans un exemple résolu tant qu'ils ne sont pas à l'aise avec certaines procédures. Des outils supplémentaires et spécifiques concernant l'acquisition progressive des connaissances et compétences nécessaires à la résolution de problèmes verbaux sont proposés par la recommandation 5 (Problèmes verbaux).

4. Utiliser des supports visuels et oraux

Les stratégies visant à soutenir l'apprentissage des élèves[19] sont au cœur de toutes les interventions en direction des élèves qui ont des difficultés en mathématiques. Utiliser des supports visuels et oraux en fait partie.

Les supports oraux peuvent inclure des incitations ou des questions de l'enseignant pour permettre aux élèves de se concentrer et de trouver les liens entre leurs connaissances antérieurement acquises et les nouveaux concepts mathématiques abordés. Ces supports oraux peuvent être accompagnés d'un visuel pouvant inclure un geste ou une représentation concrète ou semi-concrète. Un visuel peut également consister en une image ou un diagramme à utiliser comme « indice » pour une prochaine étape ou comme un rappel pour réfléchir à un concept particulier.

Chaque recommandation de ce guide des pratiques propose des approches spécifiques pour soutenir l'apprentissage des élèves visuellement et oralement. Par exemple, les affiches proposées par la recommandation 2 sur le langage mathématique permettent aux élèves de donner des explications sur les mathématiques. La recommandation 3 (représentations) et la recommandation 4 (droites numériques) offrent des explications détaillées sur la façon d'aider les élèves à visualiser les concepts mathématiques qu'ils apprennent. La recommandation 5 (problèmes verbaux) décrit l'utilisation de guides stratégiques qui aident les élèves à résoudre des problèmes complexes.

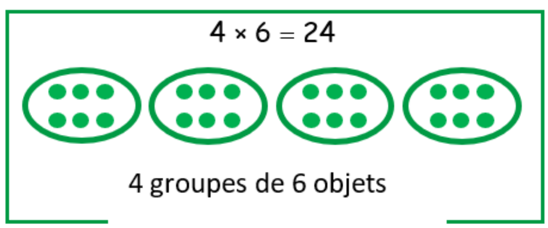
5. Faire des commentaires immédiats et encourageants aux élèves pour résoudre tout malentendu

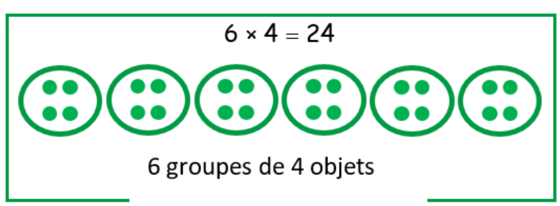
Si les élèves ne sont pas en mesure d'expliquer leur compréhension des concepts mathématiques clés ou n'exécutent pas correctement les procédures, ils ont alors besoin d'une rétroaction immédiate. Lorsque les élèves résolvent des problèmes, encouragez-les à articuler leur réflexion afin que vous puissiez identifier leurs points forts. Posez des questions approfondies pour identifier leurs idées fausses et misez sur leurs forces pour corriger ces malentendus. Structurez les questions de manière à permettre aux élèves d'identifier eux-mêmes où et comment leur réflexion a pris un mauvais chemin. Il pourrait être utile pour les élèves d'utiliser des représentations (voir la recommandation 3 sur les représentations) pour les aider à exprimer leurs réflexions. Corriger les malentendus dès leur apparition permet d'éviter que l'erreur ne devienne un problème persistant[20]. Adaptez les commentaires à chaque élève individuellement, à moins que plusieurs élèves dans un petit groupe ne soient aux prises avec le même malentendu.

L'exemple 1.1 illustre une façon d'aborder tous les points clés de cette recommandation (ces derniers sont <u>soulignés</u> dans le texte). Dans cet exemple, les élèves sont rassemblés en un petit groupe de 3 à 6 personnes et les compétences et connaissances identifiées concernent la division quand le diviseur est un nombre à plusieurs chiffres. La multiplication et la division ont déjà été modélisées en s'appuyant sur le concept de groupes de même taille et leur enseignement a été construit de manière incrémentielle et intentionnelle sur plusieurs leçons en utilisant un langage mathématique et des représentations visuelles corrects. Les élèves ont montré qu'ils comprenaient le modèle des groupes de même taille et comment ce modèle peut s'appliquer à la fois à la multiplication et à la division. Maintenant, les élèves sont prêts à apprendre comment appliquer ce modèle pour résoudre des problèmes de division avec des diviseurs à plusieurs chiffres. L'enseignant prévoit de débuter sa séance par une révision des connaissances acquises par les élèves et concernant la multiplication et la division, pour ensuite aborder la leçon sur la division avec des diviseurs à plusieurs chiffres.

Exemple 1.1. Réunir les étapes de la recommandation 1.

L'enseignant <u>revoit ce que les élèves ont déjà appris</u> sur le modèle des groupes de même taille (également connu sous le nom de modèle de soustractions répétées) et comment il peut être utilisé pour résoudre des problèmes de multiplication et de division simples. L'enseignant rappelle aux élèves des éléments connus (comme les tables de multiplication) et la relation inverse qui lie la multiplication et la division. Après avoir revu explicitement ce que les élèves savent, l'enseignant demande à une élève d'expliquer comment le modèle des groupes de même taille peut être utilisé pour calculer le résultat de 4 × 6. Parce que cette élève s'est récemment entraînée à résoudre des problèmes de multiplication et de division à l'aide d'une représentation visuelle, elle dessine 4 cercles contenant 6 points chacun et explique qu'elle a créé 4 groupes de 6 et a compté pour résoudre le problème de multiplication. Si nécessaire, l'enseignant est prêt à avertir l'élève s'il manque un point clé et à la corriger. L'enseignant demande à un autre élève de calculer 6 × 4 en donnant des explications.





Puis l'enseignant demande à un autre élève d'expliquer comment le modèle des groupes de même taille peut être utilisé pour trouver le résultat de 24 divisé par 6. L'élève dessine 24 points et les partage en 4 groupes de 6 points (des groupes de même taille). L'enseignant aide l'élève à expliquer comment le problème peut être résolu en soustrayant à plusieurs reprises des groupes de 6 à 24 pour déterminer le nombre de groupes de 6 que l'on trouve dans 24. Notez qu'il reporte le nombre de groupes soustraits sur le côté droit.

24 : 6 = 4

$$\begin{array}{r} \mathbf{24}\\ -6\\ 18\\ -6\\ 12\\ -6\\ 6\\ -6\\ 0 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} \\ \longrightarrow \text{ 1 groupe de 6}\\ \\ \longrightarrow \text{ 1 groupe de 6}\\ \\ \longrightarrow \text{ 1 groupe de 6}\\ \\ \longrightarrow \text{ 1 groupe de 6}\\ \\ \end{array}\right\} \text{ 4 groupes de 6}$$

L'enseignant présente aux élèves une variété de problèmes à résoudre avec des éléments connus concernant la multiplication et la division. Les élèves s'exercent à résoudre les problèmes individuellement ou avec un partenaire. Au fur et à mesure que les élèves partagent leurs solutions avec le groupe, l'enseignant fait des commentaires correctifs. Lorsque l'enseignant entend ou observe qu'un élève rate un point clé, il lui pose des questions guidées pour l'aider dans ses explications et l'encourager à utiliser un langage mathématiquement précis.

L'enseignant s'appuie sur les connaissances antérieures des élèves en expliquant que ce modèle de groupe de même taille utilisé pour résoudre les problèmes de multiplication et de division connexes peut être utilisé pour résoudre les problèmes de division avec des diviseurs à deux chiffres. L'enseignant rappelle aux élèves qu'ils connaissent déjà le modèle de groupe de même taille puisqu'ils l'utilisent pour résoudre les problèmes de division avec des diviseurs à un chiffre. L'enseignant présente un exemple résolu d'une division avec un diviseur à plusieurs chiffres qui utilise le modèle de groupes de même taille et des soustractions répétées. Dans l'exemple, l'enseignant utilise des groupes de 12 pour effectuer la division qui a été choisie en fonction des tables de multiplication connues par les élèves, et des nombres familiers et accessibles aux élèves. L'enseignant explique chaque étape de la stratégie de solution et le raisonnement qui sous-tend ses prises de décision.

324	
-120	→ 10 groupes de 12
204	
-120	→ 10 groupes de 12
84	
-60	→ 5 groupes de 12
24	
-24	→ 2 groupes de 12

Combien de groupes de 12 a-t-on dans 324 ?

$\boxed{10 + 10 + 5 + 2 = \text{27 groupes de 12}}$

↓ Ici, voilà à quoi cela ressemble quand l'élève comprend le processus et reporte le nombre de groupes soustraits.

324	12
-120	10
204	
-120	10
84	
-60	5
24	
-24	2
0	27

Pour le prochain exemple résolu, l'enseignant demande aux élèves de participer à l'explication de chaque étape de calcul. L'enseignant donne plusieurs exemples en demandant aux élèves de l'aider à résoudre le problème et de discuter de leur processus de réflexion avec le reste du groupe. L'enseignant incite les élèves à s'engager dans les calculs pour chacune des opérations ou pose des questions guidées pour les aider. Les élèves sont invités à expliquer les stratégies qu'ils utilisent et les réponses qu'ils donnent.

L'enseignant demande aux élèves d'effectuer des divisions avec des diviseurs à plusieurs chiffres en utilisant des nombres accessibles avec un partenaire. L'enseignant écoute chaque discussion et observe l'avancement du processus de résolution, faisant des commentaires correctifs si nécessaire ou encourageant les élèves à poursuivre.

L'enseignant propose des calculs plus difficiles dans les leçons suivantes à mesure que les élèves gagnent en confiance et en compétence dans l'utilisation du modèle des groupes de même taille pour calculer les résultats de divisions avec des diviseurs à plusieurs chiffres en effectuant des soustractions répétées.

Les éventuels obstacles et comment les surmonter

« Je n'ai pas accès à un programme d'intervention dans mon école. Êtes-vous en train de dire que je devrais créer mon propre matériel pédagogique ou trouver des ressources gratuites ? Comment savoir si les préparations et/ou exercices que je crée ou que je trouve sont systématiques ? »

Conseil : Le panel ne suggère pas aux enseignants de créer du matériel qui s'aligne sur les étapes de cette recommandation. Au lieu de cela, le panel suggère d'utiliser ces étapes comme lignes directrices pour évaluer des programmes à adopter. Trouver des ressources par vous-même peut être difficile. Travaillez avec une équipe (comme un formateur en mathématiques et un éducateur spécialisé) pour rechercher des ressources qui constituent une séquence d'enseignement entière décomposée en plusieurs séances avec des compétences et connaissances clairement identifiées. Évaluez la séquence et son objectif pour déterminer s'il existe des procédures claires permettant l'introduction de nouveaux contenus, de multiples opportunités pour les élèves de répondre et de participer et que des procédures de rétroaction sont intégrées.

« J'ai l'impression qu'il y a tellement de choses à couvrir à chaque niveau d'étude que choisir des sujets pour un enseignement plus intensif et/ou ralentir l'enseignement signifie que je ne peux pas couvrir tout le

programme du niveau d'étude. J'ai l'impression de rendre un mauvais service à mes élèves. »

Conseil : L'intervention est une opportunité permettant aux élèves de développer leur compréhension des sujets les plus critiques du niveau d'étude. Les élèves bénéficient d'une intervention parce qu'ils ont besoin de plus de temps et de travailler plus fréquemment avec un adulte pour apprendre les mathématiques de ce niveau d'étude. Structurer le rythme et les thèmes d'intervention de manière à favoriser un apprentissage plus approfondi des mathématiques, cela signifie souvent prendre plus de temps[21]. En collaborant, les enseignants en charge de l'intervention et les enseignants qui enseignent les mathématiques en classe entière, peuvent s'assurer que l'intervention complète l'enseignement des mathématiques du niveau d'étude concerné. En particulier, les enseignants peuvent identifier ensemble ce que les élèves doivent travailler et comprendre durant l'intervention pour pouvoir accéder à l'ensemble du contenu de leur niveau d'étude. Les fractions au CE2 et au CM1, par exemple, peuvent être difficiles pour les élèves et leur compréhension est indispensable pour pratiquement tous les nouveaux apprentissages mathématiques au collège et au lycée. Pour les élèves ayant des programmes d'enseignement individualisé (*Individualized Education Programs*, *IEP*), le panel recommande que les enseignants identifient des objectifs spécifiques pour guider les décisions pédagogiques prises au bénéfice de leurs élèves.

Recommandation 2

Recommandation 2 : langage mathématique

Enseigner un langage mathématique clair et concis et soutenir la pratique de ce langage par les élèves pour leur permettre de communiquer efficacement leur compréhension des concepts mathématiques

Introduction

Le langage mathématique est un **langage académique** qui concerne spécifiquement des sujets mathématiques[22]. Ce langage comprend une terminologie et des structures linguistiques qui permettent de réfléchir, de parler et d'écrire durant les cours de mathématiques. Le langage mathématique transmet une compréhension plus précise des mathématiques que ne le ferait le langage courant ou informel utilisé quotidiennement pour communiquer avec les autres[23].

La compréhension du langage mathématique par les élèves est essentielle à leur apprentissage, car il est utilisé par les manuels, les programmes et les évaluations, ainsi que par les enseignants durant leur enseignement[24]. En proposant un enseignement sur le langage mathématique, les enseignants soutiennent l'apprentissage par les élèves de sujets mathématiques subtils et complexes[25]. Le fait de se concentrer sur le langage mathématique pendant l'intervention aide également les élèves à accéder au langage utilisé pendant les heures de cours en classe entière[26]. Par conséquent, la bonne pratique du langage mathématique par les élèves est essentielle à leur réussite en mathématiques[27], et ce, d'autant plus que les sujets deviennent plus complexes.

Les enseignants et les élèves peuvent communiquer plus clairement pendant les cours lorsqu'ils utilisent ensemble le même langage mathématique[28]. Au fur et à mesure que les enseignants utilisent et modélisent un langage mathématique correct, leurs élèves entendent les mots correspondant aux mathématiques qu'ils apprennent et commencent à intégrer ce langage dans leurs propres explications mathématiques[29].

Lorsque les enseignants utilisent un langage courant ou informel à la place d'un langage mathématique, les élèves peuvent être désorientés. Par exemple, certains enseignants peuvent appeler la commutativité de l'addition (a + b = b + a) la « propriété de bascule ». Bien que ce nom créatif puisse être considéré comme un périphérique de mémoire amusant, le remplacement de termes précis par un langage informel comme celui-ci peut causer une grave confusion plus tard dans la scolarité des élèves lorsque d'autres enseignants n'utilisent pas la « propriété de bascule » ou lorsque les élèves ne connaissent pas le lien avec le terme formel correct, c'est-à-dire la commutativité. L'utilisation et la pratique d'une terminologie correcte dès le début de la scolarité peuvent prévenir certaines difficultés.

Les programmes actuels soulignent la nécessité pour les élèves d'utiliser un langage mathématique précis lorsqu'ils fournissent des explications en cours de mathématiques[30]. En apprenant le langage mathématique, les élèves seront en mesure de donner des explications sur les décisions qu'ils prennent lors de la résolution de problèmes et seront mieux équipés pour construire des arguments logiques lors de la clarification d'une stratégie de résolution[31].

Le WWC et le groupe d'experts ont attribué un niveau de preuve solide à cette recommandation en se basant sur 16 études portant sur l'efficacité de la pratique d'un langage mathématique précis tout au long des interventions[32]. Parmi elles, douze études répondent aux normes WWC sans réserve[33], et quatre études répondent aux normes WWC avec réserves[34]. Voir l'annexe C pour une justification détaillée du niveau de preuve associé à la recommandation 2.

Cette recommandation présente les points clés d'un enseignement du langage mathématique et des pistes pour permettre aux élèves d'utiliser un langage mathématique lorsqu'ils communiquent sur des sujets mathématiques. Incluez ces étapes tout au long du programme d'intervention[35]. Lors des interventions, les élèves auront besoin d'être exposés fréquemment à un langage mathématique précis pour en comprendre le sens et pour l'intégrer progressivement à leur **langage**

vernaculaire[36]. Ce chapitre décrit des stratégies, des exemples et des outils qui permettent aux enseignants d'intégrer efficacement l'enseignement du langage mathématique durant leurs interventions.

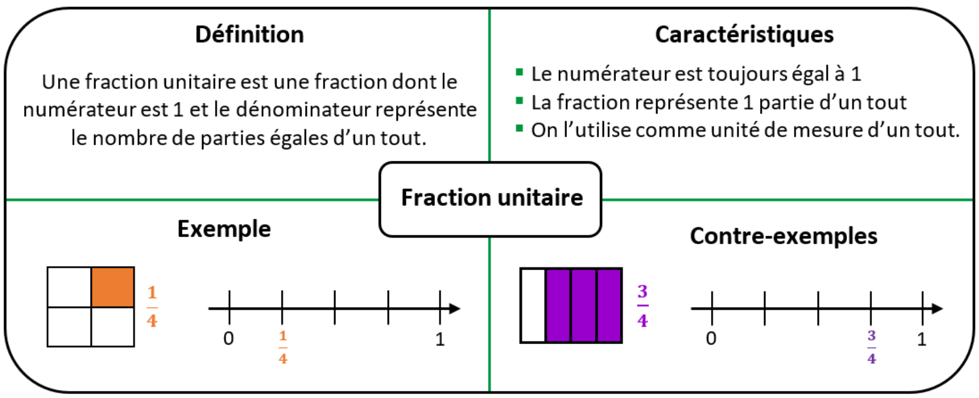
Comment mettre en œuvre la recommandation

1. Enseigner régulièrement le vocabulaire mathématique pour aider les élèves à comprendre les mathématiques qu'ils apprennent

Introduisez un nouveau vocabulaire mathématique pendant l'enseignement en contextualisant et en donnant du sens aux mots[37]. Utilisez des **définitions adaptées** aux élèves avec des mots mathématiques simples et familiers[38]. Associez le nouveau vocabulaire à une variété d'exemples lorsque cela est possible, y compris des représentations concrètes ou semi-concrètes. Dans l'exemple 2.1, un schéma associe un nouveau mot de vocabulaire, fraction unitaire, à sa définition, ses caractéristiques, avec des exemples et des contre-exemples adaptés aux élèves. Utilisez ce type de schéma avec n'importe quel mot de vocabulaire pour représenter visuellement et symboliquement le sens d'un mot[39].

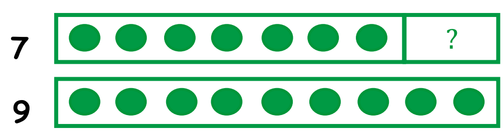
Donner simplement la définition d'un terme n'est pas suffisant pour développer la compréhension par les élèves du vocabulaire et des concepts mathématiques[40]. Approfondir la compréhension des mots par les élèves en les associant à des représentations concrètes et semi-concrètes. Certains gestes de la main et jeux de rôle peuvent également constituer un contexte qui donne un sens au vocabulaire mathématique. Ce contexte (représentations, gestes de la main, jeux de rôle…) permettra aux élèves de mieux comprendre ce qu'ils apprennent[41]. L'exemple 2.2 propose une activité pratique avec des représentations concrètes (des jetons), pour permettre aux élèves d'apprendre et de comprendre la signification du signe et du mot égal. L'exemple 2.3 propose comme activité un jeu de rôle pour permettre aux élèves d'apprendre et de comprendre le sens du mot diviser.

Exemple 2.1. Schéma présentant la définition adaptée à l'élève, les caractéristiques, des exemples et contre-exemples du terme fraction unitaire.



Exemple 2.2. Représentation concrète utilisée pour permettre aux élèves de comprendre la signification du signe et du mot égal au début de l'école primaire (niveaux maternelle-CE1).

L'enseignante compte 9 jetons et 7 jetons et les pose sur la table en formant deux rangées. Elle explique que les deux rangées doivent avoir un nombre égal de jetons et explique que égal signifie le même nombre.

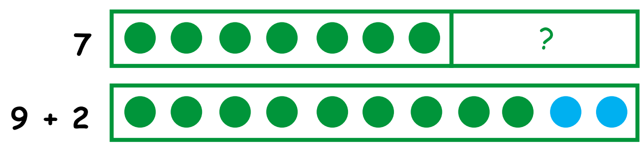


Ensuite, elle écrit la notation mathématique qui est représentée, expliquant que les 7 jetons sont représentés par le nombre 7, le signe d'addition est représenté par le signe +, la ligne vide représente une **inconnue**, le signe égal indique que les quantités à gauche et à droite de ce signe représentent le même nombre, et que le 9 représente un total ou une somme.

7 + __ = 9

L'enseignante demande : « Combien de jetons devez-vous ajouter à 7 pour obtenir 9 ? » Les élèves ajoutent 2 jetons à la rangée du haut. Ensuite, les élèves écrivent 2 sur la ligne vierge.

Ensuite, l'enseignante construit l'idée du signe égal en changeant le nombre de jetons dans les deux rangées. L'enseignante retire les deux nouveaux jetons de la rangée du haut et les ajoute au groupe de 9 de la rangée du bas.



Puis elle écrit l'équation suivante : $\mathbf{7 + \underline{\quad} = 9 + 2}$

Elle demande aux élèves d'indiquer où se trouvent les jetons représentant les nombres 7, 9 et 2 sur la table. Ensuite, elle demande aux élèves comment ils pourraient faire en sorte que les deux quantités dans les deux rangées et de chaque côté du signe égal aient la même valeur. Les élèves ajoutent 4 jetons à la rangée du haut et écrivent 4 sur la ligne vierge. L'enseignante et les élèves discutent de ce nouveau concept d'égalité en reprenant l'idée que des deux côtés d'un signe égal, on doit avoir les mêmes quantités.

Exemple 2.3. Jeu de rôle avec des gestes de la main pour enseigner le sens d'un sujet mathématique et du vocabulaire associé.

Enseignant : – *On va considérer l'opération douze divisé par trois : « 12 : 3 ». Pour cette opération, on doit diviser 12 en 3 groupes de même taille. Pour nous aider à comprendre ce que signifie diviser une quantité de quelque chose en groupes de même taille, supposons que nous divisons 12 pommes entre trois familles. Nous voulons savoir combien de pommes chaque famille recevra.*

Si nous considérons que chaque assiette en carton est le panier d'une famille et que chaque jeton est une pomme, de combien d'assiettes aurons-nous besoin ? De combien de jetons aurons-nous besoin en tout ?

Les élèves doivent alors sélectionner 3 assiettes et 12 jetons. L'enseignant pose des **questions guidées** si les élèves ont besoin d'aide.

Enseignant : – *Maintenant, j'aimerais que vous divisiez les jetons entre les 3 familles.*

L'enseignant montre aux élèves comment diviser les jetons dans les assiettes. Son geste ressemble à celui d'un croupier distribuant des cartes ou plus généralement à un mouvement de la main qui « donne » une pomme par panier jusqu'à ce que les « pommes » soient toutes réparties équitablement. L'enseignant termine en comptant le nombre de pommes par famille.

Pour soutenir l'apprentissage à tous les niveaux d'étude et dans toutes les situations, les écoles devraient envisager de créer une liste de termes mathématiques commune, liste qui s'étofferait au fil des niveaux d'étude[42]. Cette liste commune peut garantir que les enseignants utilisent un vocabulaire et un langage cohérents durant les interventions comme en classe entière, favorisant ainsi l'apprentissage des élèves qui reçoivent un enseignement dans les deux contextes[43]. Le tableau 2.1 présente des exemples de termes mathématiques précis que les enseignants peuvent utiliser à tous les niveaux d'étude et dans tous les contextes d'enseignement d'une école.

Tableau 2.1. Exemple d'une liste de mots pouvant être utilisés de la maternelle à la 6^{e} par tous les enseignants de l'école[44]

Plutôt que d'utiliser ce terme…	**… utilisez ce terme**
Diminuer (dénominateur et numérateur d'une fraction)	Simplifier ou réduire (une fraction)
Figure plate	Figure à deux dimensions
Plus grand que, plus petit que	Supérieur à, inférieur à
Changer l'ordre	Utiliser la commutativité

Note : Cette liste n'est pas exhaustive, et contient seulement des exemples de mots qui devraient apparaitre sur une liste plus complète de mots utilisés à l'école.

2. Utiliser un langage mathématique clair, concis et correct tout au long des séances pour renforcer la compréhension par les élèves des mots importants du vocabulaire mathématique

Utilisez et mettez l'accent sur un langage mathématique clair, concis et correct tout au long de l'enseignement : lorsque vous faites référence à un sujet nouveau ou déjà appris, lorsque vous discutez des devoirs et lorsque vous répondez aux questions. Plusieurs séances peuvent être nécessaires pour que les élèves comprennent un nouveau vocabulaire mathématique et développent une compréhension approfondie des mathématiques liées à ces mots[45]. Une utilisation cohérente du langage mathématique permet aux élèves d'apprendre comment les termes doivent être utilisés et de développer une compréhension plus approfondie des termes[46].

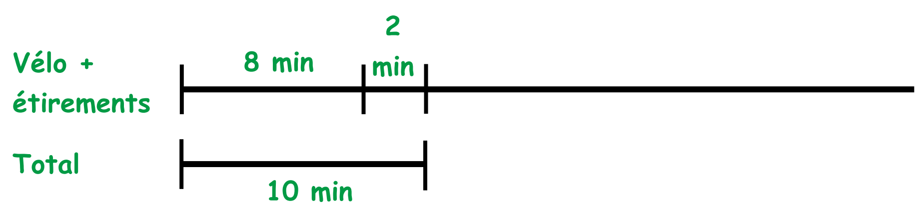
Modélisez un langage mathématique précis lorsque vous expliquez votre processus de réflexion et quand vous montrez comment résoudre un problème. Dans l'exemple 2.4, l'enseignante utilise les termes « proportionnalité » et « proportionnelles » tout en expliquant à voix haute son raisonnement pour résoudre un problème verbal. Cette utilisation continue et répétitive du terme concourt à renforcer le sens de la proportionnalité et permet de comprendre son utilisation pour la résolution du problème.

Exemple 2.4. Enseignante utilisant le vocabulaire mathématique en pensant à voix haute lors d'une intervention en mathématiques au deuxième cycle du primaire (du CE2 à la 6^{e}).

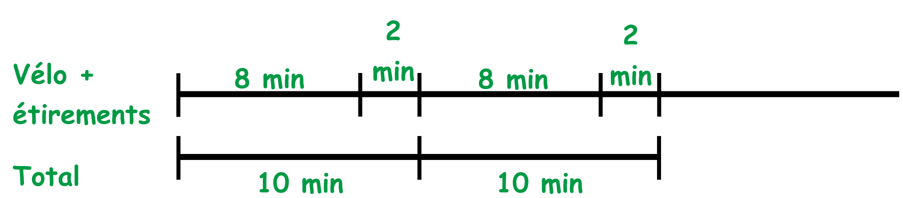
Tout d'abord, l'enseignante lit le problème à voix haute. Au cours de sa réflexion, toujours à voix haute, l'enseignante explique son raisonnement afin que les élèves comprennent bien toutes les étapes de la solution.

Vocabulaire de la proportionnalité
Problème : Kesha doit s'entrainer pour participer à une course cycliste. Pendant une séance d'entrainement, elle alterne le vélo d'appartement avec des étirements : après 8 minutes de vélo d'appartement, elle fait 2 minutes d'étirements. Pendant une séance d'entrainement de 30 minutes, combien de temps a-t-elle fait des étirements ?

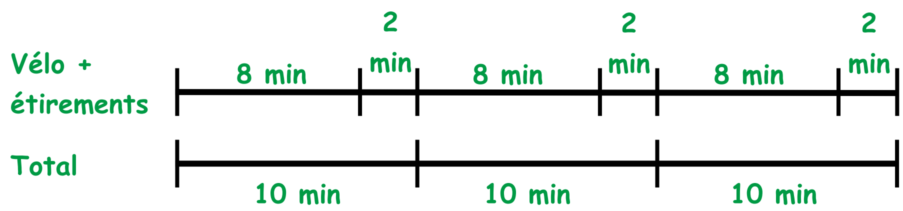
Enseignante : – *On me demande de calculer combien de minutes Kesha passe à faire des étirements pour une séance d'entrainement de 30 minutes. Toutes les durées sont* <u>*proportionnelles*</u> *: la durée de l'exercice à vélo, la durée des étirements et la durée totale de ces deux exercices. Je vais utiliser les propriétés de la* <u>*proportionnalité*</u> *pour trouver la réponse en utilisant un diagramme à bandes qui représentera les 30 minutes de la séance d'entrainement. Je vois que la première fois qu'elle fait du vélo pendant 8 minutes, après elle fait des étirements pendant 2 minutes, et que cela fait en tout 10 minutes d'exercices.*



Comme ces grandeurs sont <u>*proportionnelles*</u>*, je vais ajouter une séance de vélo et d'étirements, et je vérifie si j'arrive à 30 minutes en tout.*



Comme ce n'est pas le cas, je recommence, toujours en m'appuyant sur les propriétés de la proportionnalité.



Maintenant, je vois que j'ai 10 + 10 + 10 qui font 30 minutes. J'utilise mon diagramme pour voir combien de minutes Kesha a passées pour faire des étirements. La durée totale des étirements est de 2 + 2 + 2. Donc la réponse à la question est que les étirements de Kesha ont duré 6 minutes en tout durant cette séance d'entrainement.

Certains mots peuvent avoir plus d'un sens ou sont utilisés dans plus d'un contexte en mathématiques[47]. Donnez des informations sur les différentes façons dont les mots sont utilisés, à l'aide d'exemples. Dans l'exemple 2.5, l'enseignant dirige une activité pour élargir la compréhension des élèves des termes facteur et produit en introduisant la notion de diviseurs. Les élèves ont déjà appris que les facteurs sont les deux nombres multipliés dans une multiplication pour calculer un produit. Dans cette leçon, les élèves apprennent qu'un produit peut être le résultat de plusieurs multiplications, et que les facteurs de ces dernières sont les diviseurs du produit. Plus tard, les élèves seront alors en mesure de trouver un dénominateur commun pour additionner ou soustraire des fractions. Cette nouvelle notion de diviseur prépare également les élèves à trouver le plus grand diviseur commun de deux nombres.

Exemple 2.5. L'enseignant dirige une activité pédagogique pour approfondir la compréhension par les élèves du terme facteur et pour introduire la notion de diviseur.

La leçon ci-dessous se concentre sur les mots de vocabulaire facteur et diviseur. L'enseignant utilise également d'autres termes mathématiques corrects comme multiplication et produit.
Enseignant : – *Certains problèmes de multiplication nous demandent de multiplier deux nombres pour trouver le produit. Les deux nombres que nous multiplions sont appelés des facteurs. Aujourd'hui, je vais vous donner un produit et vous devez trouver un facteur manquant.*

Produit : 24

Tout d'abord, essayons de trouver un facteur manquant à une multiplication avec 24 comme produit. Je vais vous donner le premier facteur. Je sais que 24 est un nombre pair, donc je sais que 2 peut être multiplié par un autre nombre pour donner 24. Cela signifie que 2 est un des facteurs d'une multiplication dont le produit est égal à 24. Est-ce que quelqu'un sait quel nombre multiplié par 2 donnerait comme produit 24 ?
L'enseignant donne aux élèves le temps de répondre et de trouver que 12 est l'autre facteur de la multiplication dont le produit est égal à 24. Si les élèves ont des difficultés, l'enseignant peut leur demander d'utiliser 24 jetons et de les regrouper en groupes de 2 pour montrer aux élèves que 2 fois 12 égale 24. L'enseignant devrait écrire au tableau à mesure que chaque élève donne une réponse.

24 = 2 x 12

Produit Facteurs

Enseignant : – *On dit aussi que 2 est un diviseur de 24 et que 12 est un diviseur de 24. Maintenant, je veux que vous travailliez avec un partenaire*

pour trouver les autres paires de facteurs des multiplications dont le produit est 24, ou encore d'autres diviseurs de 24.
Laissez aux élèves le temps de travailler avec un partenaire.
Enseignant : – *Je vais demander à chaque groupe de me donner deux facteurs qui, une fois multipliés, sont égaux au produit 24. Nous continuerons jusqu'à ce que nous ayons répertorié tous les facteurs possibles d'une multiplication dont le produit est 24 ou encore tous les diviseurs possibles de 24.*
Les élèves partagent leurs réponses. Au fur et à mesure que les élèves répondent, l'enseignant enregistre les facteurs ou diviseurs sur le tableau. Si les élèves ont besoin d'utiliser des jetons pour créer des tableaux (tels que le nombre de lignes x le nombre de colonnes = 24) et trouver les diviseurs de 24, donnez-leur accès à ce support. Montrer les différents tableaux possibles sur un écran peut permettre aux élèves de modéliser le problème et de trouver les diviseurs. Si vous utilisez des jetons pour créer ces tableaux, soulignez qu'il y a toujours 24 jetons et que les jetons ne sont ni ajoutés ni supprimés lors de la construction des différents tableaux pour obtenir comme produit 24. Finalement, au tableau, l'enseignant aura écrit :

24 = 2 x 12 = 6 x 4 = 8 x 3 = 12 x 2 = 4 x 6 = 24 x 1 = 3 x 8 = 1 x 24

Produit Facteurs

Enseignant : – *N'oubliez pas que les deux nombres qui sont multipliés dans une multiplication pour obtenir un produit sont appelés les facteurs de cette multiplication mais aussi les diviseurs de ce nombre. Donnons enfin la liste de tous les diviseurs de 24 classés par ordre croissant :*

Diviseurs de 24 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24

3. Aider les élèves à utiliser un langage mathématique précis lors de leurs explications orales ou écrites concernant leurs résolutions de problèmes

Demandez aux élèves de donner des explications orales et écrites sur les concepts mathématiques pendant l'intervention pour leur permettre d'approfondir les sujets mathématiques clés. Expliquer leur travail offre aux élèves la possibilité de communiquer leur compréhension des mathématiques en utilisant un vocabulaire nouvellement appris et permet également aux enseignants de vérifier leur compréhension et de proposer une rétroaction corrective immédiate le cas échéant[48].

Les élèves auront probablement besoin d'aide pour expliquer leur raisonnement en utilisant un langage mathématique[49]. Offrez aux élèves un cadre leur permettant de donner des explications, comme un **début de phrase clé** ou des questions guidées. Il est également utile que les enseignants reformulent les explications des élèves en utilisant un langage correct lorsque les élèves ne le font pas[50]. Dans l'exemple 2.6, l'enseignant pose à une élève des questions guidées en utilisant une terminologie mathématique précise pendant que l'élève explique son propre raisonnement. Au cours de la discussion sur leurs méthodes de résolution, une élève, Kerry, a expliqué son raisonnement aux autres élèves du groupe d'intervention. L'enseignant a posé des questions de clarification et a reformulé les commentaires de Kerry pour qu'elle utilise un langage mathématique plus précis. L'objectif est ici que Kerry adopte le vocabulaire que l'enseignant utilise lorsque ce dernier clarifie les explications de Kerry lors de la résolution de ce problème.

Exemple 2.6. Enseignant incitant les élèves à utiliser la terminologie mathématique dans leurs explications.

Une soustraction est posée au tableau :

  327
– 148

Kerry — *J'ai remarqué que 8 est plus grand que 7.*

Enseignant — *Tu as d'abord comparé les chiffres des unités ? Voulais-tu dire que 8 est supérieur à 7 ? N'oublie pas que lorsqu'un nombre est « plus grand » qu'un autre nombre, nous disons supérieur à.*
Kerry — *Oui, j'ai commencé par les unités, 7 et 8. 8 était plus grand, donc j'ai dû rayer le 2 et le transformer en 1. Cela faisait 17.*
Enseignant — *Parce que 8 était supérieur à 7, tu as procédé à un regroupement. Tu as pris une dizaine aux 2 dizaines de 327 et tu l'as ajouté aux 7 unités pour obtenir 17. Ensuite, tu as changé le 2 des dizaines en un 1.*
L'enseignant montre le chiffre 2 des dizaines.
Kerry — *Oui, parce qu'il y avait 2 dizaines, j'en ai utilisé une pour faire 17. Ensuite j'ai soustrait le 8 et j'ai obtenu 9 unités. Ensuite, j'ai regardé et remarqué que 4 était supérieur à 1. J'ai donc dû le changer à nouveau.*
Enseignant — *Tu as décrit comment tu as su regrouper les unités et comment tu devais ensuite utiliser à nouveau cette procédure pour les dizaines. Lorsque tu regroupes, tu utilises ce que tu sais sur la valeur de position des chiffres.*
Kerry — *Alors, j'ai regroupé les centaines parce qu'il y a 3 centaines dans 327. Je pouvais séparer 300 en 200 et 100. J'ai ajouté 100 aux dizaines, et maintenant je peux soustraire 40 à 110 ! Cela m'a donné un 7 à la place des dizaines pour la réponse. C'est 7 dizaines.*
Enseignant — *Donc, ta réponse est que pour l'instant on écrit 79 ?*
Kerry — *Oui, et puis j'ai juste dû soustraire les centaines. Je n'ai pas eu besoin de regrouper. 200 moins 100 égale 100. La différence est égale à 179 !*

Rappelez aux élèves qu'ils doivent utiliser le langage mathématique modélisé et enseigné durant les leçons en affichant le vocabulaire mathématique sur le mur de la classe. Ces types de supports peuvent être utiles pour les explications orales et écrites[51]. Les tableaux 2.2 et 2.3 sont des affiches qui pourraient être utilisées au début de l'élémentaire (de la maternelle au CE1) et au deuxième cycle de l'élémentaire (du CE2 à la 6^{e}) respectivement, pour aider les élèves à utiliser un langage mathématique correct lorsqu'ils donnent des explications écrites et orales.

Tableau 2.2. Affiche permettant aux élèves du premier cycle de l'élémentaire (de la maternelle au CE1) d'utiliser un langage mathématique correct pour présenter leur réflexion

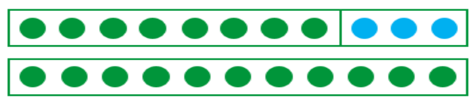
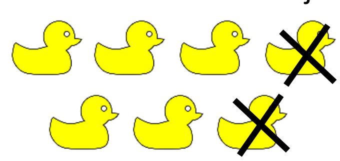
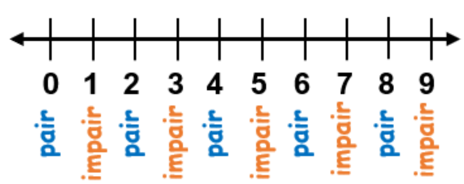
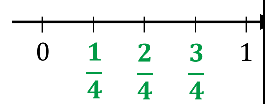
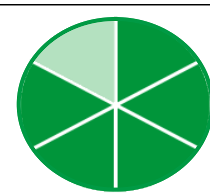
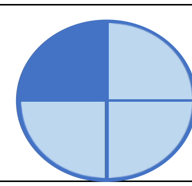
Termes	**Définition**	**Exemple/Représentation**
Addition	Réunir ou ajouter deux ensembles. L'addition est représentée par le symbole + (« plus »).	Exemple d'addition : 8 + 3 = 11  **8 + 3 = 11** Terme Somme
Soustraction	Retirer une quantité ou comparer deux quantités et trouver leur différence. La soustraction est représentée par le symbole – (« moins »).	Exemple de soustraction : 7 – 2 = 5 J'ai 7 canards jaunes et j'en retire 2, il reste alors 5 canards jaunes.  Exemple d'une comparaison : Rosie a 11 ans. Éric a 9 ans. Quelle est leur différence d'âge ?
Nombres pairs	Nombres entiers dont la division euclidienne par 2 donne un reste nul. Le chiffre des unités d'un nombre pair est 0, 2, 4, 6, ou 8.	0, 2, 4, 6, et 8 sont des nombres pairs. 

Tableau 2.3. Affiche permettant aux élèves du deuxième cycle de l'élémentaire (du CE2 à la 6[e]) d'utiliser un langage mathématique correct pour présenter leur réflexion

Termes	**Définitions**	**Exemples** **Représentation**
Fraction	Les fractions peuvent avoir différents sens : • Fraction partage (partie d'un tout) • Fraction comme unité de mesure • Fraction comme un nombre	$\frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{5}{5}, \frac{3}{2}$ $\frac{3}{4}$ de la surface du jardin est plantée de carottes. 
Numérateur	Le nombre de parties de taille égale utilisées. C'est le nombre de fois que la fraction unitaire est répétée. Dans cet exemple, 5 est le numérateur.	$\frac{5}{6}$ 
Dénominateur	Le nombre de parties de même taille qui composent le tout. Dans cet exemple 4 est le dénominateur.	$\frac{1}{4}$ 
Fraction unitaire	Utilisée comme unité de mesure d'un tout (par exemple, $\frac{1}{8}$ est ajouté 8 fois pour créer le tout ou bien 1). Son numérateur est égal à 1.	$\frac{1}{8}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$

Les éventuels obstacles et comment les surmonter

« Je ne sais pas quels mots je suis censé utiliser. Tout le monde semble utiliser une terminologie différente ».

Conseil : Passez en revue les programmes pour identifier les mots importants que les élèves doivent apprendre. Tenez également compte des directives d'évaluation nationale et du matériel pédagogique utilisé dans l'école. Consultez vos collègues pour rédiger une liste de mots exacts et précis que l'école peut envisager d'utiliser dans les cours de mathématiques à tous les niveaux et dans tous les contextes. Il pourrait s'agir d'une liste de mots mathématiques commune sur laquelle les enseignants de toute l'école s'entendent[52].

« Enseigner le vocabulaire prend du temps que nous n'avons pas. »

Conseil : Intégrez l'enseignement de ce langage tout au long de l'intervention en mathématiques. Présentez et utilisez des mots mathématiques intentionnellement et tout au long des séances pour renforcer leur sens[53]. Adopter cette approche ne nécessite pas d'ajouter une activité qui pourrait prendre du temps supplémentaire. Il n'est pas nécessaire d'avoir une séance complète axée sur le vocabulaire.

Recommandation 3 : représentations

Utiliser un ensemble bien choisi de représentations concrètes et semi-concrètes pour permettre aux élèves d'apprendre les concepts et les procédures mathématiques

Introduction

Les représentations concrètes et semi-concrètes font partie intégrante des programmes d'enseignement de base. Cependant, les élèves qui ont du mal à apprendre les mathématiques ont besoin d'un enseignement supplémentaire et ciblé utilisant des représentations pour modéliser des sujets mathématiques[54]. Choisissez soigneusement les représentations et reliez-les explicitement aux représentations abstraites (notations mathématiques). Si les enseignants le font, les élèves peuvent conceptualiser le lien entre les représentations et les mathématiques. Il est également important de proposer aux élèves de nombreuses occasions d'utiliser des représentations et leur permettre ainsi de comprendre la nature abstraite des mathématiques au fil du temps.

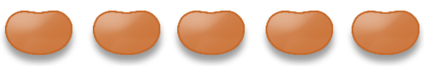
Le WWC et le groupe d'experts ont attribué un niveau de preuve solide à cette recommandation en se basant sur 28 études portant sur l'efficacité de l'utilisation d'un ensemble bien choisi de représentations dans le but de soutenir l'apprentissage des élèves[55]. Parmi elles, dix-neuf études répondent aux normes WWC sans réserve[56], et neuf études répondent aux normes WWC avec réserves[57]. Voir l'annexe C pour une justification détaillée du niveau de preuve associé à la recommandation 3.

Cette recommandation décrit les quatre étapes que les enseignants devraient mettre en application pour permettre à leurs élèves de comprendre les mathématiques à l'aide de représentations concrètes et semi-concrètes. Ce chapitre décrit des stratégies, des exemples et des outils qui permettent aux enseignants d'utiliser efficacement les représentations pour soutenir l'apprentissage de leurs élèves.

Les représentations concrètes, semi-concrètes et abstraites

Les représentations illustrent la valeur des nombres et les relations entre des quantités. Les représentations concrètes et semi-concrètes sont des moyens puissants qui permettent de visualiser les idées mathématiques et de les rendre plus accessibles aux élèves. La création de modèles visuels à l'aide de représentations concrètes ou semi-concrètes peut permettre aux élèves de réfléchir et de résoudre des problèmes plus facilement, car ils les aident à comprendre la logique sous-jacente aux concepts et procédures mathématiques (a).

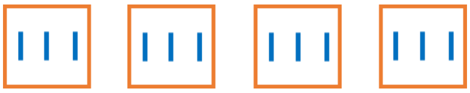
● Les représentations concrètes sont en trois dimensions (3D) ; ce sont des objets ou des actions que les élèves peuvent organiser, utiliser ou manipuler pour mieux comprendre un contenu mathématique (par exemple, regrouper avec des blocs de base 10, utiliser des carrés fractionnaires pour comparer deux fractions, jouer un rôle pour concrétiser un problème). Les représentations concrètes permettent aux élèves de mieux comprendre les concepts mathématiques lorsqu'ils les modélisent physiquement à l'aide d'objets ou lorsqu'ils mettent en scène les scénarios de problèmes pour rendre les concepts mathématiques sous-jacents visibles et moins difficiles à interpréter (b). Par exemple, en comptant des haricots ou des cubes emboitables, les élèves font des correspondances entre un nombre et une quantité.



5

● Les représentations semi-concrètes sont des représentations visuelles bidimensionnelles (2D) telles que des diagrammes en bandes, des dessins simples, des tableaux, des tables, des graphiques et des droites numériques qui peuvent aider les élèves à organiser l'information. Elles peuvent être utilisées en conjonction avec des représentations concrètes pour passer à des représentations plus abstraites. Par exemple, les élèves qui ont du mal avec l'addition, la soustraction, la multiplication ou la division peuvent trouver utile de représenter des quantités avec des traits ou en dessinant des points. Étant donné que la droite numérique est une représentation semi-concrète essentielle et utilisée lors de nombreuses interventions, nous consacrons une recommandation distincte à son utilisation efficace (voir la recommandation 4).

4 x 3 = 12



Les images des représentations concrètes et semi-concrètes décrites ci-dessus sont parfois présentées et exploitées sur un écran d'ordinateur ou une tablette.

● Les <u>représentations abstraites</u> sont des notations mathématiques qui peuvent inclure des nombres, des symboles opérationnels ou relationnels et des expressions mathématiques (telles que 4, 16, les symboles de la multiplication, de l'égalité, de l'inégalité, ainsi que des égalités telles que 4 × 4 = 16).

a. **Fuchs *et al.*, 2005 ;** Fuchs & Fuchs, 2001 ; Jitendra *et al.*, 2016.
b. **Fuchs *et al.*, 2005 ;** Fuchs & Fuchs, 2001 ; Jitendra *et al.*, 2016.

Comment mettre en œuvre la recommandation

1. Proposer aux élèves les représentations concrètes et semi-concrètes qui représentent efficacement le concept ou la procédure à étudier

Toutes les représentations ne sont pas pertinentes pour étayer l'enseignement de n'importe quel concept mathématique[58]. Pour être efficace, une représentation doit être choisie de façon intentionnelle et sélective. Il est donc essentiel de proposer aux élèves les représentations qui modélisent le plus précisément le concept ou la procédure étudiés. Le tableau 3.1 fournit quelques exemples de représentations efficaces pour accompagner l'enseignement de concepts et/ou de procédures spécifiques.

Tableau 3.1. Exemples de représentations concrètes et semi-concrètes courantes pouvant être utilisées pour certains concepts et/ou procédures mathématiques

Concepts et procédures mathématiques	**Représentation concrète**	**Représentation semi-concrète**
Compter Additionner Soustraire Multiplier Diviser Égalité	▪ Blocs de base 10 ▪ Cubes emboitables ▪ Réglette Cuisenaire ▪ Perles ▪ Jetons de deux couleurs ▪ Perles et tasses ▪ Carrés de 2,5 cm ▪ Balances	▪ Tableau des nombres de 0 à 100 ▪ Cadres vides avec 5, 10 ou 2 fois 10 cases ▪ Diagrammes en bandes ▪ Tableaux (colonne x lignes) ▪ Droite numérique
Valeur de position des chiffres Nombres décimaux Opérations avec des décimaux	▪ Blocs de base 10 ▪ Carrés de 2,5 cm ▪ Cubes emboitables ▪ Carrés décimaux	▪ Tableau des valeurs de position ▪ Représentation de blocs de base 10 ▪ Tableau des nombres de 0 à 100. ▪ Roues des nombres rationnels ▪ Droite numérique

Concepts et procédures mathématiques	**Représentation concrète**	**Représentation semi-concrète**
Fractions Opérations avec fractions Données statistiques Ratios et proportions	▪ Réglette Cuisenaire ▪ Cubes emboitables ▪ Barres de fraction ▪ Carrés fractionnés ▪ Cercles fractionnés ▪ Jetons recto verso ▪ Carrés de 2,5 cm	▪ Tableau ▪ Droite numérique ▪ Diagrammes en bandes ▪ Graphique en barre ▪ Graphiques linéaires ▪ Droite numérique
Transformations Géométrie Représentation graphique Superficie/périmètre Volume/capacité Axe de symétrie Mesure de longueur Figures 2D Figures 3D	▪ Figures géométriques ▪ Carrés de 2,5 cm ▪ Cubes emboitables ▪ Règles, rubans à mesurer ▪ Formes de solides ▪ Rapporteurs ▪ Verres gradués	▪ Images de figures géométriques ▪ Papier millimétré ▪ Droite numérique ▪ **Papier isométrique**

Remarque : Ce tableau n'est pas une liste complète de toutes les représentations, ni ne répertorie tous les concepts et procédures mathématiques correspondants.

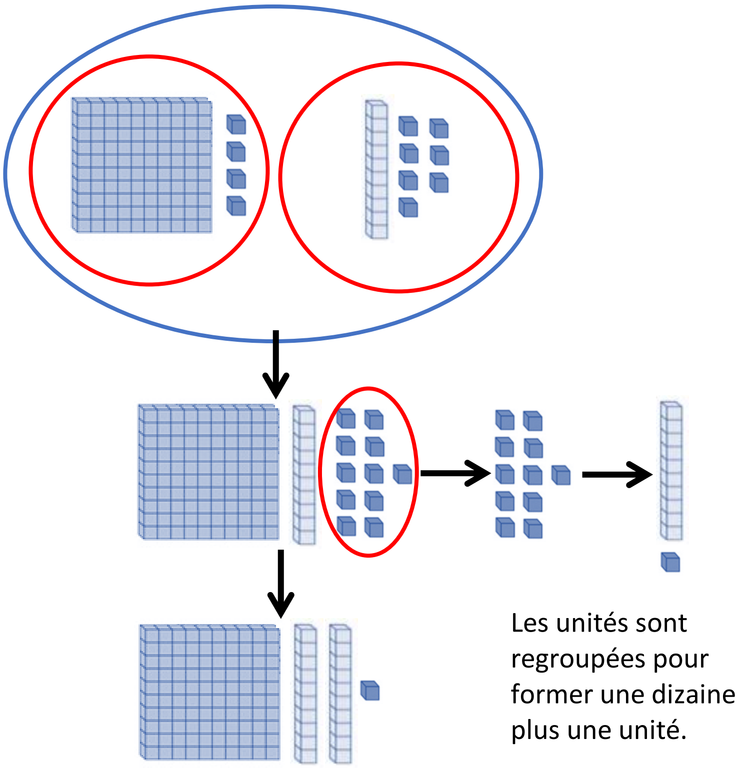
Le cas échéant, utilisez des représentations qui respectent les règles de la proportionnalité. Par exemple, lors de l'enseignement de la valeur de position, la taille de la représentation des unités doit être égale à un dixième de la taille de la représentation des dizaines, et la taille de la représentation des dizaines doit être égale à un dixième de la taille de la représentation des centaines. Dans l'exemple 3.1, le problème est représenté en utilisant des blocs de base 10 pour enseigner la valeur de position des unités, des dizaines et des centaines, et les proportions sont respectées. Remarquez comment ces représentations permettent de visualiser le concept de regroupement avec précision. Les cubes unitaires, lorsqu'ils sont regroupés en un ensemble de dix, ont la même taille, la même forme et la même longueur que la barre qui représente l'unité des dizaines. Dix barres de dizaines ont la taille et la forme de la plaque représentant l'unité de centaines. Si les représentations n'étaient pas proportionnelles, la notion de valeur de position serait plus difficile à saisir pour les élèves. La proportionnalité des représentations est également importante lors de l'enseignement du concept des fractions et quand elles sont utilisées pour modéliser des opérations.

2. Relier les représentations concrètes et semi-concrètes aux représentations abstraites lors de l'enseignement de concept et de procédure

Bien que, dans certaines circonstances, sélectionner soit une représentation concrète, soit une représentation semi-concrète puisse être approprié pour enseigner et représenter un concept particulier, la plupart des concepts et procédures peuvent être efficacement représentés en associant et une représentation concrète et une représentation semi-concrète à la représentation abstraite (notation mathématique). Lors de la démonstration de concepts et de procédures avec des représentations concrètes et semi-concrètes, présentez la notation mathématique simultanément afin que les élèves puissent conceptualiser le lien entre les représentations et les mathématiques. Il est également important de relier les représentations concrètes et semi-concrètes entre elles lors de l'enseignement d'un même concept[59]. Il est utile d'établir ces liens lors de l'introduction du nouveau matériel et lors de la révision d'un contenu déjà appris. Il est également important d'établir ces connexions quand on utilise d'une nouvelle manière une représentation familière.

Exemple 3.1. L'enseignante modélise l'addition en utilisant des blocs de base 10 pour étudier le concept de la valeur de position et la technique du regroupement.

104 + 17 = ______



104 + 17 = 121

L'exemple 3.2 montre comment les représentations peuvent être alignées verticalement pour démontrer leur connexion. Lorsque le concept d'addition est présenté pour la première fois, un enseignant peut utiliser des jetons comme représentation concrète tout en utilisant également des images ou des croquis comme représentation semi-concrète. Lier les jetons aux représentations picturales et aussi à la notation mathématique peut permettre aux élèves de consolider le concept d'addition.

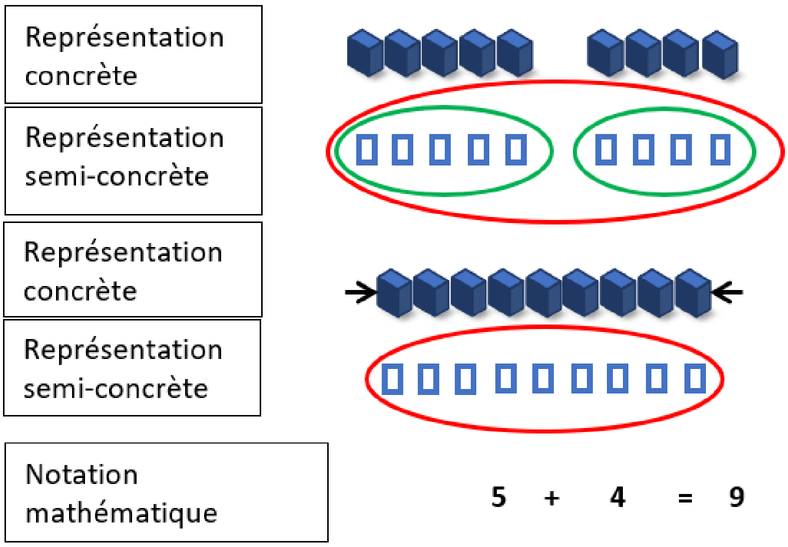
L'exemple 3.3 montre comment un enseignant utilise une représentation familière d'une nouvelle manière. Dans cet exemple, les élèves de deuxième cycle du primaire qui sont habitués à utiliser des blocs de base 10 pour représenter des opérations sur des nombres entiers, vont pouvoir utiliser ce matériel pour représenter la valeur de position d'un nombre décimal. L'enseignant et les élèves discutent de la façon dont, en réaffectant la valeur des différents éléments, ils peuvent également utiliser ces blocs pour représenter des nombres décimaux. L'enseignant aide les élèves à conceptualiser comment ce même outil peut être utilisé pour représenter la valeur de position d'un nombre décimal. Ces représentations respectent toujours les règles de la proportionnalité. Après avoir présenté aux élèves cette façon d'utiliser les blocs de base 10, l'enseignant peut demander aux élèves de représenter des nombres décimaux simples, comme 1,2 ou 4,5.

3. Offrir aux élèves de nombreuses occasions significatives d'utiliser des représentations pour que l'utilisation des représentations devienne un véritable outil de réflexion

Multiplier les occasions de travailler avec des représentations pour que les élèves puissent les utiliser avec succès pour modéliser des concepts et des procédures et résoudre des problèmes[60]. Proposer aux élèves de n'utiliser les représentations que de temps en temps, ne sera pas suffisant. Au fil de ces multiples utilisations, les élèves commenceront à comprendre plus profondément les concepts mathématiques et à comprendre comment les représentations peuvent être utilisées comme « outils de réflexion » en mathématiques[61].

Exemple 3.2. L'enseignante montre comment l'addition de deux groupes (un groupe de 4 et un groupe de 5) peut être représentée par des représentations concrètes et semi-concrètes et aboutir à une égalité : 5 + 4 = _____

Enseignante : – *En examinant ce problème, nous voyons que nous devons additionner 4 et 5. Je peux utiliser des jetons pour constituer un premier groupe de 4 jetons et un second groupe de 5 jetons. Ensuite, je peux les additionner et compter combien j'ai de jetons en tout. Je peux aussi dessiner 4 carrés pour représenter le nombre 4 et 5 carrés pour représenter le nombre 5, puis compter combien de carrés j'ai dessinés en tout. Je vois que j'ai dessiné 9 carrés, donc la réponse au problème est 4 + 5 est égal à 9.*

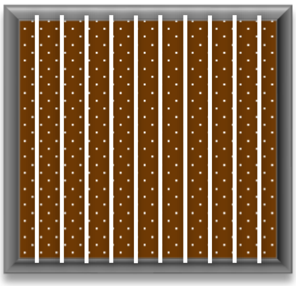


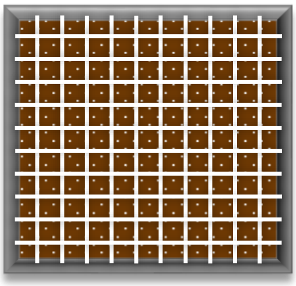
Plutôt que de compter le nombre total de cubes ou de carrés en commençant par 1, les élèves peuvent être encouragés à compter à partir de l'un des termes. Les élèves commencent par 5 et comptent encore 4 jusqu'à ce qu'ils atteignent 9. Enfin, les élèves peuvent également utiliser leurs doigts pour résoudre ce problème d'addition.

Exemple 3.3. Enseignant expliquant comment utiliser des blocs de base 10, avec lesquels les élèves sont déjà familiers, pour résoudre des problèmes d'addition et de soustraction avec des nombres décimaux.

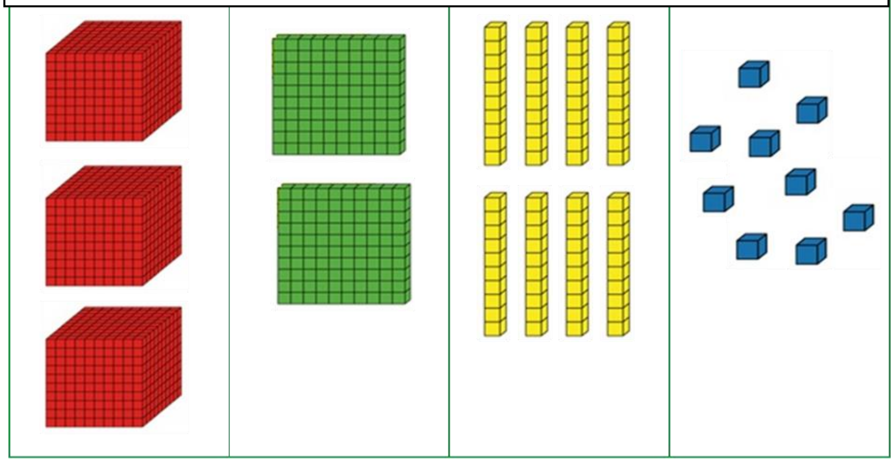
Enseignant : *Lorsque nous souhaitons représenter des nombres décimaux, les blocs de base 10 peuvent à nouveau être utilisés. La pièce qui représentait une centaine d'unités représentera cette fois une unité, la pièce qui représentait une dizaine d'unités représentera un dixième d'unité, et les pièces qui représentaient une unité d'entier représenteront les centièmes d'unité. Ensuite, le cube qui représentait auparavant des milliers d'unités représentera désormais des dizaines d'unités. Vous pourriez imaginer que la pièce carrée plate est en réalité un plat carré rempli de brownies pour une grande famille. Si la famille coupait les brownies en 10 longs morceaux, chaque morceau représenterait 1/10 ou 0,1 du plat de brownies. S'ils coupent ces 10 morceaux en 10 parties égales dans l'autre sens (faire des coupes horizontales d'un dixième en dix carrés égaux), chaque partie est maintenant égale à 1/100 ou 0,01 du tout.*

Voici comment le nombre 32,89 serait représenté en utilisant des blocs de base 10. Si les grands carrés représentent des unités, alors un groupe de 10 grands carrés formerait un cube et représenterait une dizaine. Pour représenter 30, il faudrait 3 gros cubes. Pour représenter 2 unités, nous aurions besoin de 2 grands carrés. 8 colonnes de petits carrés représenteraient 8 dixièmes soit 0,8 et 9 petits carrés représenteraient 9 centièmes soit 0,09.





Dizaines	Unités	Dixièmes	Centièmes



L'objectif poursuivi lors de l'utilisation de ces représentations est de permettre aux élèves de mieux comprendre les concepts et les procédures mathématiques, et de faire en sorte qu'ils considèrent les représentations comme des outils leur permettant de modéliser des problèmes et de développer leur compréhension[62].

Les représentations peuvent être utilisées lorsque les élèves expliquent leur raisonnement[63]. Au début, les élèves peuvent avoir besoin d'aide pour expliquer comment ils ont utilisé les représentations pour décrire les sujets mathématiques. Posez des questions guidées pour aider les élèves à expliquer comment ils ont représenté les concepts et/ou les procédures[64]. Au fur et à mesure que les élèves deviennent plus à l'aise avec les représentations, demandez-leur régulièrement d'utiliser les représentations pour expliquer leur **méthode de résolution**. Cela permet à l'élève qui explique sa démarche mais aussi aux élèves qui écoutent son explication, de renforcer leurs raisonnements mathématiques.

4. Utiliser fréquemment les représentations concrètes et semi-concrètes pour consolider et approfondir la compréhension des sujets mathématiques

Les élèves utiliseront des représentations au lycée (et au-delà) telles que des blocs algébriques, des modèles géométriques et des logiciels pour modéliser les transformations géométriques[65]. À mesure que les élèves deviennent plus à l'aise avec les mathématiques, ils utiliseront moins souvent ces représentations concrètes ou semi-concrètes[66].

Utilisez systématiquement les représentations concrètes et semi-concrètes pour consolider et approfondir la compréhension par les élèves des sujets mathématiques. Ainsi, si les élèves ne sont pas capables de résoudre correctement des problèmes ou s'ils se sentent incertains quant à la façon d'aborder un problème, encouragez-les à utiliser une représentation concrète ou semi-concrète pour représenter ou modéliser la situation. Mettez à leur disposition des représentations concrètes et semi-concrètes pour qu'ils puissent les utiliser au besoin. Les représentations aideront les élèves à se familiariser avec les mathématiques[67].

Les éventuels obstacles et comment les surmonter

« J'ai relié les concepts et procédures abstraits à des représentations concrètes et semi-concrètes, puis je les ai supprimés, mais je ne pense pas que mes élèves comprennent pleinement les concepts. »

Conseil : Ne supprimez les représentations concrètes et semi-concrètes qu'au fur et à mesure que les élèves deviennent performants quand ils travaillent de manière abstraite. Si les élèves ne comprennent pas pleinement les concepts, alors supprimer les représentations n'est pas approprié. Révisez périodiquement l'utilisation des représentations concrètes et semi-concrètes pour clarifier et consolider le lien entre les notations abstraites et ces représentations. En révisant périodiquement ces connexions, les élèves en auront une compréhension plus profonde, voire auront de nouvelles idées[68]. Et même quand les représentations abstraites sont utilisées de manière plus assurée par l'élève, les représentations concrètes et semi-concrètes continuent d'être utiles car permettent de construire et clarifier les concepts mathématiques sous-jacents[69].

« Mes élèves se contentent de jouer avec des représentations concrètes et ne se concentrent pas sur les mathématiques. »

Conseil : Expliquez les attentes relatives à l'utilisation appropriée en présentant les représentations concrètes comme des outils d'apprentissage. Les élèves auront besoin d'informations sur la façon d'utiliser efficacement ces représentations et pour leur permettre d'affiner leur raisonnement[70]. Montrer le lien entre les représentations et les mathématiques peut ne pas suffire pour que les élèves puissent les utiliser de manière autonome. Les élèves peuvent également avoir besoin d'informations sur la façon dont les représentations peuvent être utilisées pour réfléchir et résoudre un problème. Sans information, certains élèves ne sauront pas comment utiliser une représentation d'une manière qui facilitera leur compréhension. L'enseignement peut être conduit en modélisant et en discutant tout au long des étapes de résolution d'un problème, ou il peut être fait en encourageant une discussion avec les élèves sur la façon dont les concepts et les procédures peuvent être représentés. Les élèves peuvent faire part aux autres élèves de leurs réflexions et de leur façon d'utiliser les représentations.

« Mes élèves sont désorientés parce que différentes représentations sont utilisées dans différentes classes. »

Conseil : Les types de représentations utilisées durant les heures de cours en classe entière et durant les séances d'intervention, tout au long de l'année et d'une année à l'autre, doivent absolument être cohérents[71]. Cette utilisation cohérente est particulièrement importante pour les élèves qui ont du mal à saisir un concept ou une procédure[72]. L'utilisation d'un ensemble de représentations de base à travers les diverses situations d'enseignement et les différents niveaux d'étude permet de consolider l'apprentissage d'un même concept. Le même ensemble de représentations de base doit être utilisé à tous les niveaux d'étude : l'élève devrait retrouver les mêmes représentations d'une année à l'autre. Ce niveau de cohérence peut faire partie d'une décision collégiale de l'ensemble des personnels de l'école avec comme objectif de rendre l'enseignement des mathématiques efficace grâce à l'utilisation de représentations, de langage, de notations et de règles communs à tous les niveaux d'étude.

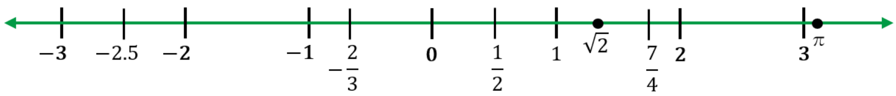
Recommandation 4 : droite numérique

Utiliser la droite numérique pour faciliter l'apprentissage des concepts et des procédures mathématiques, favoriser la compréhension des éléments du programme et préparer les élèves à des mathématiques avancées

Introduction

La droite numérique est une représentation mathématique unique qui peut représenter simultanément tous les nombres réels, et cela comprend les nombres entiers et les nombres rationnels, les nombres positifs et négatifs et d'autres ensembles de nombres. Dans l'exemple 4.1, des nombres (positifs, négatifs, rationnels, irrationnels) ont été placés sur une droite numérique. Cette capacité à représenter différents ensembles de nombres fait de la droite numérique un outil puissant pour permettre aux élèves de développer une compréhension unifiée des nombres et pour favoriser leur compréhension de sujets mathématiques complexes[73].

Exemple 4.1. Droite numérique représentant des nombres entiers, positifs, négatifs, rationnels et irrationnels.



Les droites numériques peuvent être utilisées pour enseigner une variété de sujets mathématiques et apparaissent à plusieurs reprises dans les programmes scolaires actuels[74]. Elles constituent un outil important pour enseigner et comprendre les nombres entiers et les fractions ainsi que les opérations effectuées avec ces nombres[75]. Les droites numériques sont également utiles pour résoudre des problèmes de temps et de durée[76], pour représenter graphiquement les coordonnées de points[77] et pour représenter et analyser des données[78]. Les droites numériques verticales sont utilisées pour étudier, par exemple, les questions liées à la température ou au mouvement des ressorts ou pour représenter des profondeurs[79], et peuvent être associées à une ligne horizontale pour former des repères cartésiens[80]. L'utilisation cohérente des droites numériques permet aux élèves de mieux comprendre le système numérique et d'améliorer leurs performances mathématiques globales dans plusieurs domaines mathématiques[81].

Les élèves qui maîtrisent les mathématiques construisent souvent une droite numérique mentale lorsqu'ils résolvent des problèmes[82]. Lorsqu'un enseignant utilise systématiquement des droites numériques pendant l'intervention, les élèves développent progressivement la capacité de visualiser une droite numérique lorsqu'ils examinent la **magnitude d'un nombre** tel qu'une fraction, déterminent des stratégies pour résoudre des problèmes mathématiques ou évaluent le caractère raisonnable de leurs réponses après avoir résolu des problèmes. L'utilisation de cet outil ouvre également la voie à des exercices mathématiques plus avancés au collège et au lycée, lorsque les élèves doivent manipuler des nombres négatifs ou résoudre des inéquations à l'aide de droites numériques[83].

Le WWC et le groupe d'experts ont attribué un niveau de preuve solide à cette recommandation en se basant sur 14 études portant sur l'efficacité de l'utilisation des droites numériques pour faciliter l'apprentissage de concepts et de procédures mathématiques[84]. Parmi elles, onze études répondent aux normes WWC sans réserve[85], et trois études répondent aux normes WWC avec réserves[86]. Voir l'annexe C pour une justification détaillée du niveau de preuve associé à la recommandation 4.

Cette recommandation explique comment utiliser la droite numérique durant les interventions afin de permettre aux enseignants de favoriser la compréhension des mathématiques par leurs élèves. Pour chaque étape, des conseils sont proposés avec des nombres entiers pour les premières années de l'école élémentaire (de la maternelle au CE2) puis avec des fractions et des nombres décimaux pour le deuxième cycle du primaire (du CE2 à la 6e). Ce chapitre décrit des stratégies, des exemples et des outils qui permettent aux enseignants d'utiliser efficacement les droites numériques durant leurs interventions.

Comment mettre en œuvre la recommandation

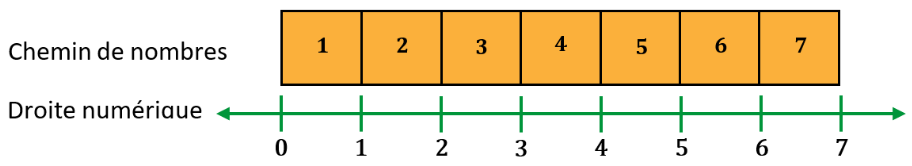
1. Représenter des nombres entiers, des fractions et des nombres décimaux sur une droite numérique pour permettre aux élèves de concevoir la magnitude d'un nombre

Début de l'élémentaire (niveaux maternelle-CE1)

Avant d'utiliser une droite numérique, présentez aux élèves une version concrète d'une droite numérique, comme, par exemple, un chemin numérique que les élèves peuvent parcourir, des jeux de société ou des cordes à linge ; cela permet aux élèves de commencer à se faire une image de ce à quoi ressemble une droite numérique. Lorsque vous utilisez ces droites numériques, concentrez-vous sur la longueur de l'unité qui devra être conservée tout au long de la droite. La distance entre les positions du zéro et du un établit la longueur de l'unité et c'est cette même distance qui sépare tous les nombres entiers consécutifs.

Après avoir exposé les élèves à une droite numérique concrète comportant une série d'unités individuelles disposées le long d'un chemin, reliez cette idée à une droite numérique sur papier ou projetée sur un écran. L'exemple 4.2 montre comment un chemin numérique concret comportant une série d'unités individuelles peut correspondre à une droite numérique[87]. Demander aux élèves d'identifier les similitudes et les différences entre les deux représentations. Attirez leur attention sur la distance entre zéro et un et sur le fait que cette distance a la même longueur qu'une unité. Cette connexion aidera les élèves à comprendre que le 1 sur une droite numérique n'est pas simplement un trait, mais représente également la distance entre un et zéro[88]. Discutez avec les élèves de la façon dont les unités concrètes représentent les mêmes nombres qu'une droite numérique.

Exemple 4.2. Relier des unités concrètes individuelles à une droite numérique pour représenter des nombres entiers positifs.



Expliquez les caractéristiques de base des droites numériques, telles que celles énumérées dans l'encadré ci-dessous. Montrez aux élèves comment chaque marque de graduation est équidistante de la marque de graduation précédente et que la distance entre deux graduations est égale à une unité. Remarquez comment les nombres entiers apparaissent dans un même schéma de comptage prévisible. C'est-à-dire que lorsque vous vous déplacez vers la droite, la magnitude du nombre augmente d'une unité, tout comme si vous comptiez par unités. Expliquez comment les nombres diminuent d'une unité lorsqu'on se déplace vers la gauche et faites remarquer aux élèves que le zéro est à gauche de 1 sur la droite numérique.

Présentez-leur d'autres modèles de comptage sur la droite numérique, tels que le comptage par sauts de deux, cinq ou dix graduations, en leur montrant que la longueur de la nouvelle unité composée de 2, 5 ou 10 unités peut être répétée sur toute la distance de la droite numérique.

Caractéristiques des droites numériques représentant des nombres entiers

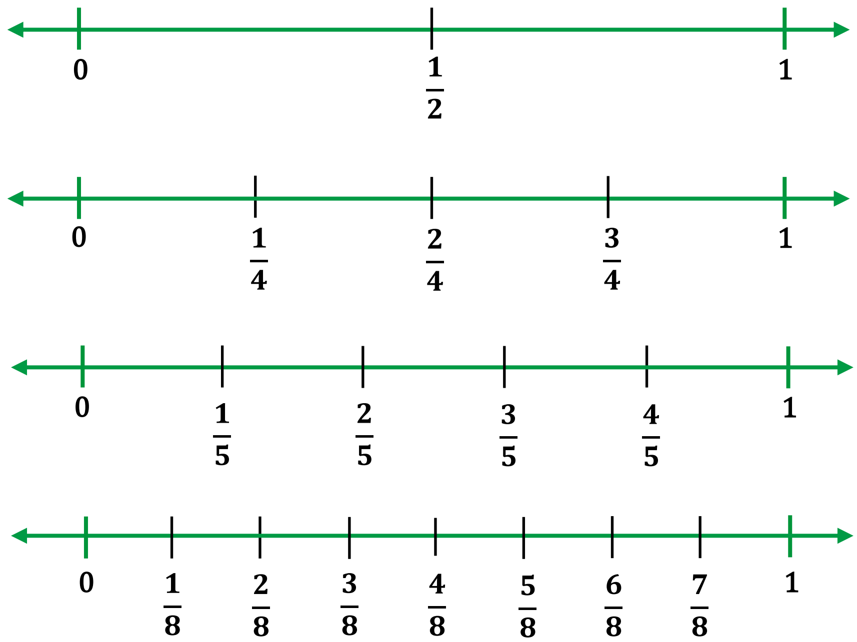
- Chaque nombre entier sur une droite numérique est équidistant du nombre entier suivant.
- Les nombres entiers sont représentés en une séquence prévisible.
- Les droites numériques se développent à l'infini ; vous pouvez toujours ajouter ou soustraire une unité supplémentaire.
- Affichez les droites numériques avec des flèches aux deux extrémités pour montrer qu'elles se développent à l'infini dans les deux sens.
- Les nombres augmentent en valeur lorsque vous vous déplacez vers la droite et les nombres diminuent en valeur lorsque vous vous déplacez vers la gauche.
- Les droites numériques peuvent être présentées avec 2, 5 ou 10 unités (par exemple, 0, 10, 20, 30… ou 0, 2, 4, 6, 8, 10…).

- Les droites numériques peuvent être :
  - ✓ des représentations tridimensionnelles/concrètes (par exemple, un thermomètre ou une règle) ;
  - ✓ des représentations bidimensionnelles/semi-concrètes (par exemple, le dessin d'une droite numérique, une image d'une règle, une échelle sur un thermomètre ou une grille de coordonnées), ou
  - ✓ des droites numériques virtuelles sur un écran ou sous forme d'image mentale dans l'esprit d'un élève.

Élémentaire supérieur (CE2 – 6e)

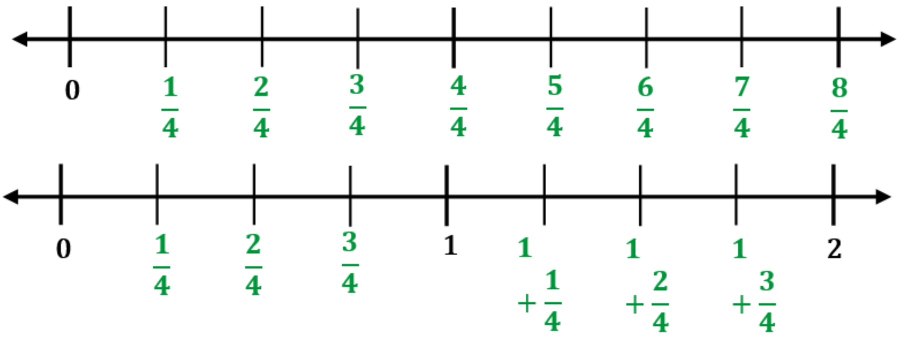
Une fois que les élèves ont compris le concept d'une fraction à l'aide de représentations concrètes, montrez-leur comment représenter des fractions sur une droite numérique en reliant une représentation concrète linéaire à une droite numérique semi-concrète. Montrez comment placer des fractions sur la droite numérique, en commençant par les fractions familières inférieures à un. Demandez aux élèves de plier une bande de papier en deux pour concrétiser deux parties égales. Discutez avec les élèves de la façon dont cela représente la partition d'un segment de la droite numérique allant de 0 à 1, en deux parties de même longueur. Demandez aux élèves de marquer l'emplacement de la fraction 1/2. Demandez-leur ensuite de diviser une bande de papier en quatre parties égales pour placer les fractions un quart, deux quarts et trois quarts sur le même segment allant de 0 à 1. Demandez aux élèves de montrer comment la droite numérique peut être divisée en un plus grand nombre de parties de même longueur, illustrant ainsi des fractions avec un plus grand dénominateur, comme des huitièmes[89]. Renforcez l'idée que le dénominateur représente le nombre de partitions d'un tout. Utilisez la droite numérique pour représenter des fractions ayant des dénominateurs impairs (ce qui représente une plus grande difficulté pour les élèves). Les droites numériques peuvent être utilisées pour représenter et travailler avec des fractions unitaires[90]. Les droites numériques de l'exemple 4.3 montrent la partie 0-1 d'une droite numérique divisée en différentes parties de même taille : moitiés, quarts, cinquièmes et huitièmes. Attirez l'attention des élèves sur la fraction unitaire représentée sur chaque droite numérique pour les aider à concevoir la magnitude relative de chaque fraction unitaire.

Exemple 4.3. Ligne numérique avec des demis, quarts, cinquièmes et huitièmes.



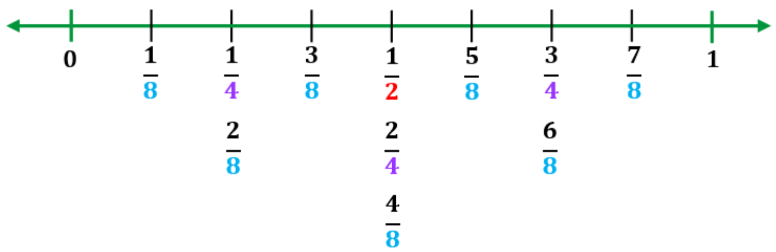
Pour s'assurer que les élèves ne pensent pas que toutes les fractions sont inférieures à un, passez du segment 0-1 au segment 0-2 pour représenter les fractions égales ou supérieures à un. Montrez aux élèves que les nombres entiers peuvent être représentés sous forme de fractions et que certaines fractions se trouvent entre des nombres entiers supérieurs à 1. L'exemple 4.4 montre deux droites numériques. La première comprend des fractions égales et supérieures à un afin qu'un élève puisse concevoir un modèle de comptage par quarts à mesure que chaque nombre augmente d'un quart. La deuxième droite numérique montre les équivalences de fractions avec la première droite numérique avec des fractions familières écrites entre deux nombres entiers, qui correspond à la façon dont sont fabriquées les règles. Discutez de la façon dont les fractions supérieures à un peuvent être exprimées de deux manières : avec un numérateur plus grand que le dénominateur comme sur la première droite numérique et comme moyen de mesurer une longueur, ou comme sur la deuxième droite numérique, en écrivant la fraction comme la somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à un. Ces écritures différentes d'un même nombre permettent aux élèves d'approfondir la notion de fraction et de mesure[91].

Exemple 4.4. Fractions égales, supérieures à 1 et inférieures à 1.



Une fois que les élèves comprennent que la fraction placée sur la droite numérique est en fait le nombre de fractions unitaires, considérée ici comme unité de mesure (par exemple, 3/4 = 1/4 + 1/4 + 1/4 = 3 x 1/4), alors la droite numérique pourra être utilisée pour introduire concrètement le concept de fractions égales ou équivalentes. Montrez aux élèves comment différentes écritures fractionnaires sont placées sur un même point d'une droite numérique en partitionnant cette dernière de deux manières différentes. Présentez des fractions avec de nouveaux dénominateurs sur plusieurs séances[92]. Dans l'exemple 4.5, la droite numérique est d'abord divisée en demis, puis en quarts, puis en huitièmes.

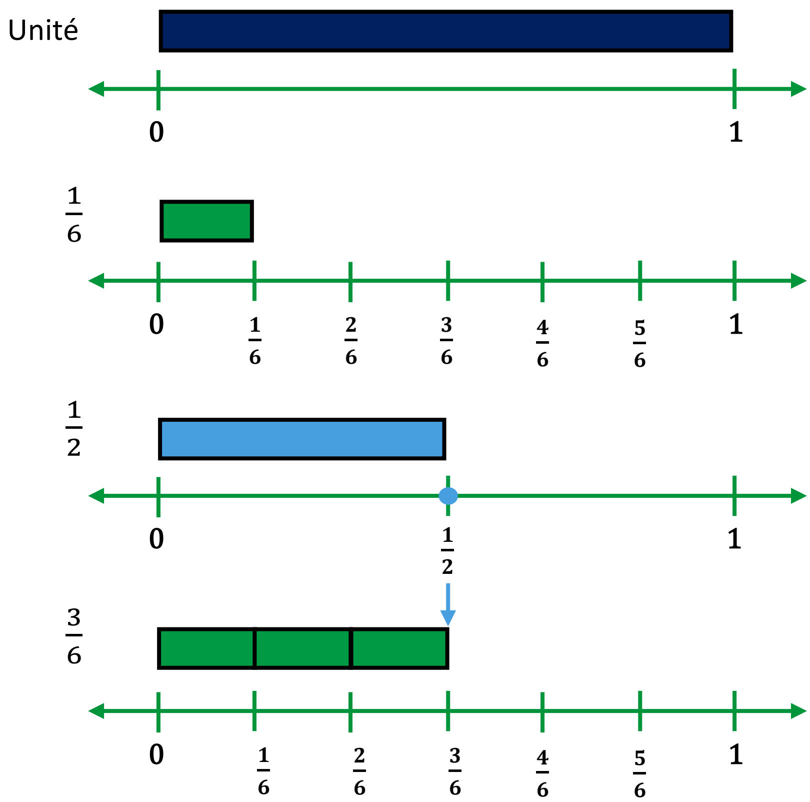
Exemple 4.5. Les fractions égales sont placées sur un même point d'une droite numérique.



Expliquez que certaines fractions sont placées sur un même point de la droite numérique et sont donc égales (par exemple, 1/4 et 2/8 sont égales, 1/2, 2/4 et 4/8 sont égales et 3/4 et 6/8 sont égales).

Incorporez d’autres **représentations linéaires** pour montrer comment deux fractions avec des dénominateurs différents peuvent être égales et être placées à la même distance de zéro sur la droite numérique. L’exemple 4.6 montre comment des réglettes en bois peuvent être utilisées avec une droite numérique pour montrer des égalités de fraction.

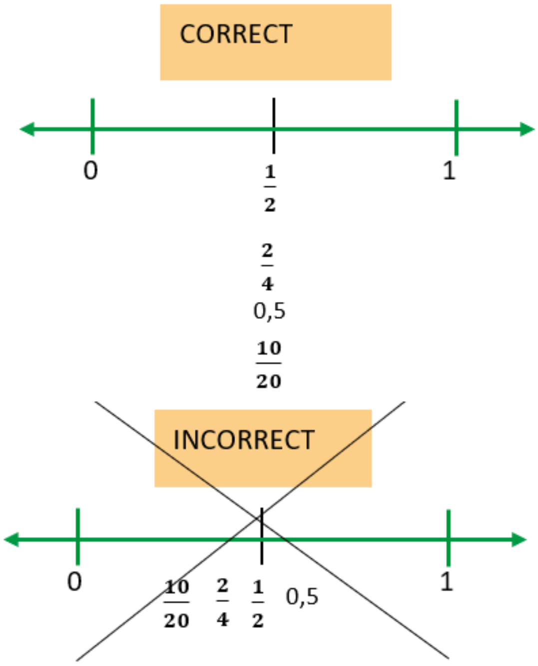
Exemple 4.6. Relier la représentation concrète d’une longueur à une droite numérique.



$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

Étendre cette idée d’équivalence en incluant des nombres décimaux et des pourcentages afin que les élèves comprennent que ces nombres sont également des écritures d’un même nombre rationnel et qu'il existe un nombre infini d'écritures pour tout nombre placé sur la droite numérique. Renforcez cette idée en écrivant les fractions équivalentes les unes sous les autres pour montrer leur position précise, plutôt que côte à côte lorsque vous êtes sur une même droite numérique. L'exemple 4.7 montre des nombres avec des écritures différentes les uns sous les autres en s'assurant qu'ils sont bien alignés verticalement sous la même graduation.

Exemple 4.7. Écrire les nombres égaux verticalement les uns sous les autres et sous le trait qui les représente, plutôt que côte à côte.

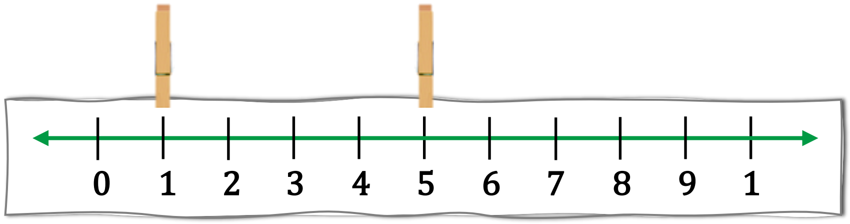


2. Comparer des nombres et déterminer leurs magnitudes relatives à l'aide d'une droite numérique pour permettre aux élèves de comprendre la notion de quantité

Début de l'élémentaire (niveaux maternelle-CE1)

Utilisez des droites numériques pour enseigner la notion de magnitude des nombres entiers. Commencez par placer deux nombres sur une droite numérique en utilisant des unités égales. Expliquez que la distance de chaque nombre à zéro est la magnitude du nombre. Les nombres entiers de plus grande magnitude sont plus à droite. Les nombres entiers de moindre magnitude sont plus à gauche et donc plus proches de 0. Expliquez comment comparer les deux nombres et déterminez lequel est le plus grand en vous basant sur le fait qu'il est éloigné de zéro d'un plus grand nombre d'unités (plus à droite lorsque vous travaillez avec des nombres entiers positifs). Dans l'exemple 4.8, les élèves constatent que 5 est plus à droite que 1.

Exemple 4.8. Utilisez des droites numériques pour enseigner la magnitude relative des nombres entiers au début de l'élémentaire (de la maternelle au CE1).



Élémentaire supérieur (CE2 à la 6^e^)

Utilisez des droites numériques pour comparer la magnitude des fractions et des nombres décimaux. Insistez auprès des élèves sur le fait que la magnitude d'une fraction et d'un nombre décimal, comme la magnitude des nombres entiers, est représentée par sa distance à zéro. Avant de comparer des fractions, les élèves doivent comprendre que les fractions ont un nombre infini d'écritures équivalentes, comme le montre l'exemple 4.6.

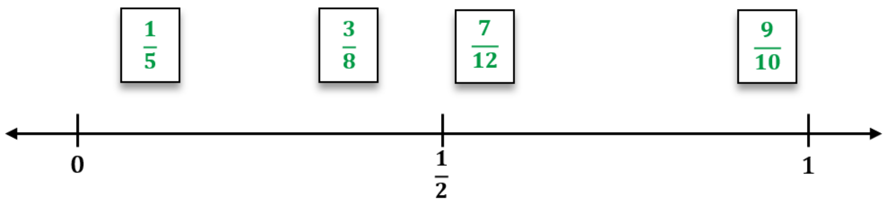
Comparer la magnitude relative des fractions en utilisant une droite numérique permet aux élèves de comprendre la valeur des fractions et la façon dont elles sont liées les unes aux autres. Aidez les élèves à comparer la magnitude des fractions en pensant d'abord à des « nombres de référence », en commençant par 0, 1/2 et 1 lorsqu'ils pensent à des fractions comprises entre 0 et 1. Les nombres de référence peuvent être placés sur une droite numérique, puis des fractions peuvent être comparées à ces nombres de référence pour finalement les comparer entre elles. Ces connaissances peuvent ensuite servir aux élèves lorsqu'ils doivent, par exemple, comparer deux fractions entre elles et utiliser la relation d'inégalité ou quand ils doivent ordonner un ensemble de fractions de la plus petite à la plus grande, ou inversement[93]. L'évaluation de la magnitude d'une fraction peut également être utile pour prédire la valeur approchée du résultat obtenu après un calcul.

Tous les niveaux élémentaires (de la maternelle à la 6^{e})

Donner aux élèves certains éléments pratiques leur permettant de déterminer la magnitude des nombres entiers, des fractions et des nombres décimaux à l'aide d'une droite numérique. Ce type d'activité leur permettra de se familiariser avec les droites numériques[94]. Les élèves bénéficiant d'une intervention auront besoin de s'exercer longtemps à utiliser des droites numériques pour devenir plus compétents dans l'estimation de la magnitude d'un nombre. Présentez aux élèves une droite numérique avec deux nombres placés au début et à la fin (par exemple, 0-1, 0-2, 0-100 ou 0-1 000) et demandez-leur d'estimer la magnitude de nombres entiers et/ou des fractions.

Dans l'exemple 4.9, les élèves travaillent en groupe pour estimer la magnitude des fractions à l'aide de nombres repères. Quatre fractions sont données sur des fiches que les élèves placent sur la droite numérique où sont placés les nombres 0 et 1. Tout d'abord, les élèves placent la **fraction de référence** un demi sur la droite numérique avant d'estimer la magnitude des autres fractions. Pour 7/12, un élève explique que la fraction est un peu à droite de 1/2 car 7/12 est obtenu en ajoutant 1/12 à 6/12 qui est égal à 1/2. L'élève suivant utilise également la fraction 1/2 comme référence pour placer 3/8, en expliquant que cette fraction est obtenue en retirant 1/8 à 4/8 qui est également égale à 1/2. Un élève place la fraction 1/5 plus près de 0 car c'est une fraction unitaire inférieure à 1/2. Enfin, un élève place 9/10 près de 1 car cette fraction est obtenue en retirant 1/10 à 10/10 ou encore à l'unité. Demandez aux élèves d'expliquer au groupe leur raisonnement quand ils placent chaque fraction et posez des questions supplémentaires pour explorer en profondeur la compréhension des concepts, si nécessaire.

Exemple 4.9. Les élèves estiment l'emplacement de quatre fractions à l'aide de nombres de référence et placent les cartes sur le segment 0-1 de la droite numérique.



3. Utiliser la droite numérique pour permettre aux élèves de comprendre les concepts sous-jacents aux opérations

Début de l'élémentaire (maternelle-CE1)

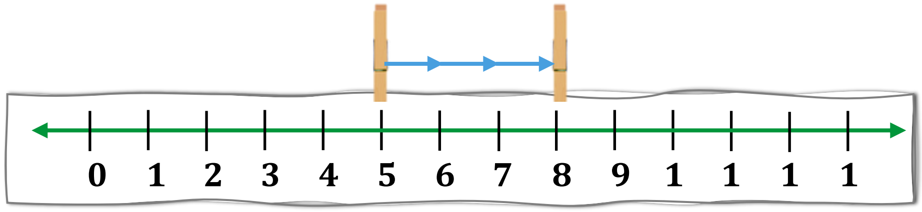
Montrez aux élèves comment utiliser des droites numériques pour additionner et soustraire des nombres entiers. Après avoir comparé des nombres entiers, les élèves commencent à apprendre l'addition et la soustraction en examinant la distance entre les nombres entiers. Dans l'exemple 4.10, les élèves déterminent d'abord que 8 est supérieur à 5. Ensuite, les élèves voient de combien 8 est supérieur à 5 en comptant à partir de 5. Ils peuvent constater que 8 est placé 3 unités à droite de 5. L'accent est mis sur l'unité de longueur, ou la distance, plutôt que sur le comptage des graduations. Lorsqu'ils se déplacent vers la droite, les élèves constatent que 5 unités plus 3 unités supplémentaires sont égales à 8 unités. Lorsqu'ils se déplacent vers la gauche, les élèves constatent qu'en commençant par 8 et en se déplaçant de 3 unités vers la gauche, on trouve 5, ce qui correspond à la soustraction 8 – 3 = 5.

Reliez toujours l'opération à la droite numérique lorsque vous résolvez des problèmes de calcul avec les élèves. Tout d'abord, modélisez un problème avec la droite numérique et demandez aux élèves d'écrire l'opération correspondante. Proposez ensuite aux élèves une opération à modéliser à l'aide de la droite numérique.

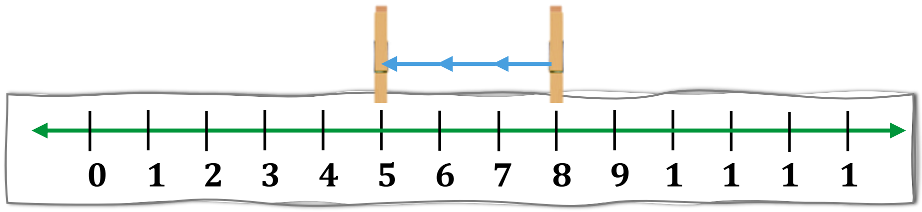
Élémentaire supérieur (CE2 à la 6^{e})

Une droite numérique est également un outil visuel puissant pour additionner ou soustraire les fractions[95]. Commencez par additionner des fractions ayant le même dénominateur.

Exemple 4.10. Montrez aux élèves du début de l’élémentaire (de la maternelle au CE1) comment utiliser des droites numériques pour additionner et soustraire des nombres entiers.



5 + 3 = 8

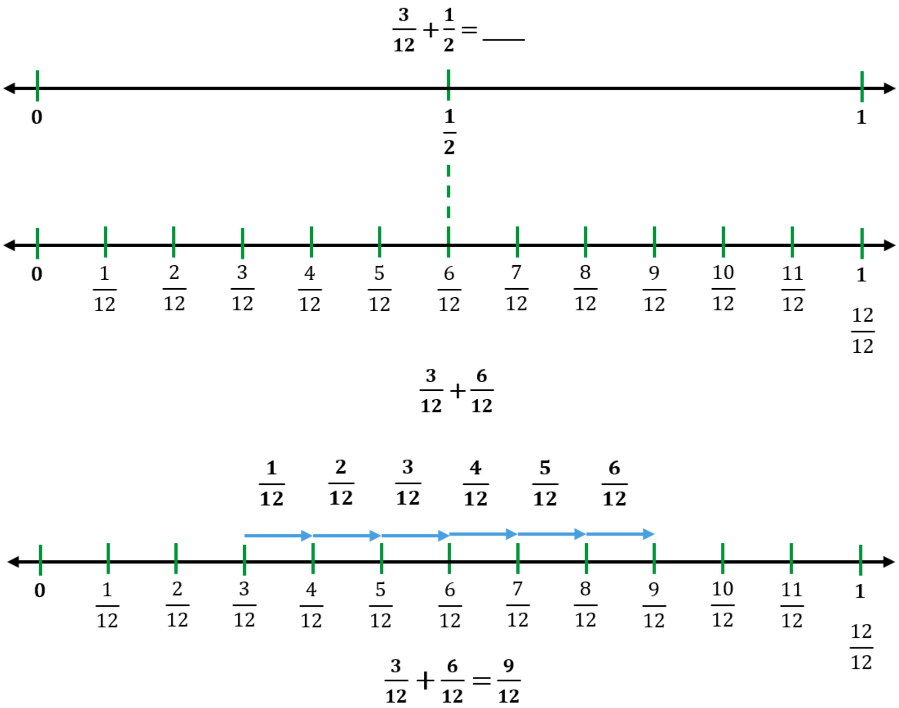


8 – 3 = 5

Cela peut être fait en utilisant une droite numérique. Lorsque vous introduisez l’addition et la soustraction avec des dénominateurs différents, montrez comment les droites numériques peuvent être particulièrement utiles.

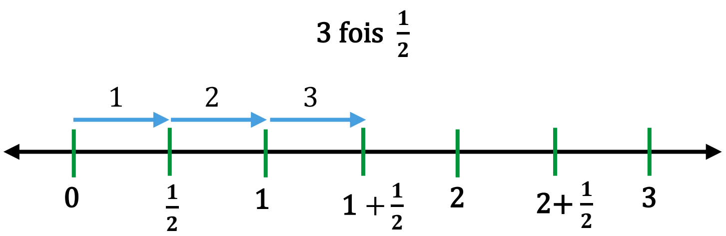
Les droites numériques aident à rendre concrets les concepts sous-jacents à l’addition et à la soustraction de fractions lorsque les deux fractions ont des dénominateurs différents[96]. L’utilisation de deux droites numériques peut rendre les équivalences plus visibles pour les élèves afin qu’ils puissent comprendre pourquoi trouver une fraction équivalente est la méthode indispensable pour résoudre ce type de problèmes[97]. L’exemple 4.11 décrit un problème d’addition où deux droites numériques sont utilisées pour montrer aux élèves que 1/2 et 6/12 sont à la même distance de 0 et, par conséquent, sont égales (ou équivalentes). Cette illustration aide les élèves à comprendre pourquoi ils peuvent utiliser des fractions égales lors de l’addition et de la soustraction de fractions avec des dénominateurs différents.

Exemple 4.11. Utilisez la droite numérique pour que les élèves comprennent comment additionner des fractions.



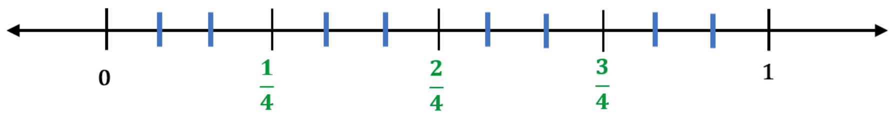
Les concepts de multiplication et de division peuvent également être représentés à l'aide d'une droite numérique. Lors de la première introduction de la multiplication et de la division de fractions, utilisez comme facteur, diviseur ou dividende des nombres entiers. Commencez par un problème verbal pour préparer le terrain à la compréhension du concept sous-jacent à l'opération. Dans ces cas, une droite numérique est utile pour représenter le problème car la droite numérique permet de représenter des nombres entiers et des fractions[98]. Les exemples 4.12 et 4.13 montrent comment les droites numériques sont utilisées pour représenter la multiplication et la division (respectivement) avec des nombres entiers comme l'un des opérandes.

Exemple 4.12. Multiplication d'une fraction par un nombre entier. Utilisez un problème verbal pour donner un contexte à l'opération : Arya parcourt une boucle d'un demi-kilomètre dans son quartier. Elle fait cette boucle 3 fois chaque matin pour s'entraîner. Combien de kilomètres Arya parcourt-elle chaque matin pour s'entraîner ?



$$3 \times \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Exemple 4.13. Division d'une fraction par un nombre entier. Utilisez un problème verbal pour donner un contexte à l'opération : Rafik doit marcher 1/4 d'heure tous les matins pour aller à l'école. Il souhaite partager ce trajet en 3 parties de même durée. Quelle fraction d'heure représente une de ces parties ?



$$\frac{1}{4} \div 3 = \frac{1}{12}$$

Les éventuels obstacles et comment les surmonter

« J'ai utilisé la droite numérique pour la multiplication des fractions et mes élèves étaient désorientés. »

Conseil : Les droites numériques ne sont pas pertinentes pour expliquer aux élèves tous les sujets mathématiques[99]. La multiplication et la division avec des fractions inférieures à 1 ne sont pas bien représentées par une droite numérique, surtout lorsque les fractions ont de grands dénominateurs. Au lieu de cela, essayez d'utiliser un autre modèle pour la multiplication lorsque les fractions sont toutes les deux inférieures à 1. Voir le tableau 3.1 de la recommandation 3 (Représentations) pour les représentations qui correspondent le mieux aux concepts mathématiques.

« Mes élèves ne veulent pas utiliser la droite numérique et les fractions de référence pour comparer des fractions, car l'égalité des produits en croix est plus facile et plus rapide. »

Conseil : De nombreux enseignants utilisent l'égalité des produits en croix pour comparer des fractions, probablement parce que c'est facile et rapide. Le panel estime cependant que l'égalité des produits en croix ne permet pas aux élèves de donner du sens aux fractions. Faites en sorte que les élèves constatent que l'utilisation de fractions de référence et la réflexion sur la magnitude relative des fractions leur permettront de mieux comprendre les opérations avec des fractions. Ne laissez pas les élèves revenir à l'égalité des produits en croix pendant l'intervention et concentrez-vous sur les concepts de fractions et sur la compréhension des procédures qui seront plus utiles aux élèves plus tard.

« Mes élèves ne semblent pas bien comprendre la droite numérique ni ce qu'elle représente. »

Conseil : Des représentations concrètes peuvent être utilisées à n'importe quel niveau scolaire pour aider les élèves à comprendre les droites numériques[100]. Utilisez des représentations concrètes avec plusieurs supports représentant une unité de longueur pour faciliter la transition vers la droite numérique. Montrez aux élèves comment construire une droite numérique en manipulant des objets dont les unités de longueur sont cohérentes et égales. Des carrés fractionnaires et des réglettes en bois peuvent être associés à des droites numériques, par exemple. Assurez-vous de montrer aux élèves quelle longueur du carré ou de la réglette représente la longueur de l'unité ou de la fraction. Associez ces éléments à la droite numérique en les alignant soigneusement. L'exemple 4.6 illustre l'association de représentations concrètes à des droites numériques comme moyen pour renforcer le concept des fractions équivalentes.

Recommandation 5 : problèmes verbaux

Proposer aux élèves un enseignement spécifique portant sur la résolution de problèmes verbaux de manière à favoriser leur compréhension des mathématiques et leur capacité à appliquer des concepts mathématiques

Introduction

Les compétences associées à la résolution des problèmes verbaux constituent une partie importante des programmes de mathématiques en vigueur à l'école élémentaire, car ces problèmes permettent aux élèves d'appliquer les mathématiques qu'ils ont apprises, de développer des capacités de raisonnement importantes et de connecter les mathématiques à une variété de scénarios ou de contextes[101]. Être capable d'appliquer les mathématiques en résolvant des problèmes verbaux permet aux élèves d'approfondir leur compréhension du contenu des programmes scolaires, les prépare à comprendre les mathématiques avancées des cycles supérieurs et, au-delà, à réussir dans leur vie professionnelle[102].

La résolution de problèmes dans les classes élémentaires se traite souvent en présentant des problèmes verbaux pouvant être résolus à l'aide de procédures de calculs, telles que l'addition, la soustraction, la multiplication et la division[103]. Malheureusement, savoir calculer ne suffit pas toujours à résoudre ces problèmes[104]. Pour mettre en place des stratégies et résoudre des problèmes verbaux, les élèves doivent lire et comprendre l'énoncé du problème, déterminer ce que le problème leur demande de trouver et identifier une ou plusieurs opérations mathématiques permettant de résoudre le problème[105]. Les élèves, ayant des difficultés en mathématiques ou à risque d'en éprouver, ont souvent des difficultés avec une ou plusieurs de ces étapes, ce qui diminue leur capacité à résoudre efficacement et correctement ces problèmes[106]. C'est pour ces raisons que le panel recommande de consacrer un certain temps aux problèmes verbaux lors des interventions.

Le WWC et le groupe d'experts ont attribué un niveau de preuve solide à cette recommandation en se basant sur 18 études portant sur l'efficacité d'un enseignement systématique sur la résolution de problèmes verbaux[107]. Parmi elles, quinze études répondent aux normes WWC sans réserve[108], et trois études répondent aux normes WWC avec réserves[109]. Voir l'annexe C pour une justification détaillée du niveau de preuve associé à la recommandation 5.

Cette recommandation présente les points saillants de l'enseignement portant sur la résolution de problèmes verbaux. Ces éléments sont des objectifs et il ne sera pas possible de tous les présenter dès la première séance. Plusieurs leçons seront nécessaires pour que les élèves puissent développer progressivement leur capacité à comprendre les problèmes verbaux et à exécuter toutes les étapes nécessaires pour les résoudre. Ce chapitre décrit des stratégies, des exemples et des outils qui permettent d'enseigner efficacement aux élèves comment résoudre des problèmes verbaux.

Comment mettre en œuvre la recommandation

1. Apprendre aux élèves à identifier des types de problèmes verbaux qui incluent le même type de données ou d'événements

Présentez un type de problème à la fois (voir encadré). Commencez par introduire un nouveau type de problème en proposant un énoncé comprenant toutes les quantités mises en jeu. Cela permet aux élèves de concevoir ce que représentent les quantités sans avoir à chercher la valeur d'une inconnue[110]. Ensuite, présentez le même énoncé avec une des quantités à calculer (c'est-à-dire un problème verbal). Faites le lien entre les quantités du premier énoncé et celles du problème verbal afin que les élèves voient en quoi elles sont identiques.

Qu'est-ce qu'un type de problème ?

Un type de problème est une catégorie de problèmes présentant tous un même type de données ou un ensemble de caractéristiques communes (a). L'identification d'un type de problème est différente de la détermination de l'opération qu'il convient d'utiliser pour résoudre le problème. Même si les deux peuvent être liés, la même opération peut être utilisée dans différents types de problèmes, ou le même type de problème peut obliger les élèves à utiliser parfois des opérations différentes. Par conséquent, il n'est pas utile d'associer un type de problème à une opération (b). Selon les programmes, des dénominations différentes peuvent être utilisées pour un même type de problèmes. Par exemple, ce que nous appelons ici un problème de transformation peut être appelé un problème d'évolution dans le temps ou de changement, selon les programmes. On rencontre souvent des problèmes

de réunion, des problèmes de comparaison et des problèmes de proportion ou de proportionnalité.
a. Carpenter *et coll.*, 1999 ; Fuchs *et al.*, 2010 ; Jitendra, Rodriguez *et al.*, 2013 ; Quilici & Mayer, 1996.
b. Fuchs, Fuchs *et al.*, 2008.

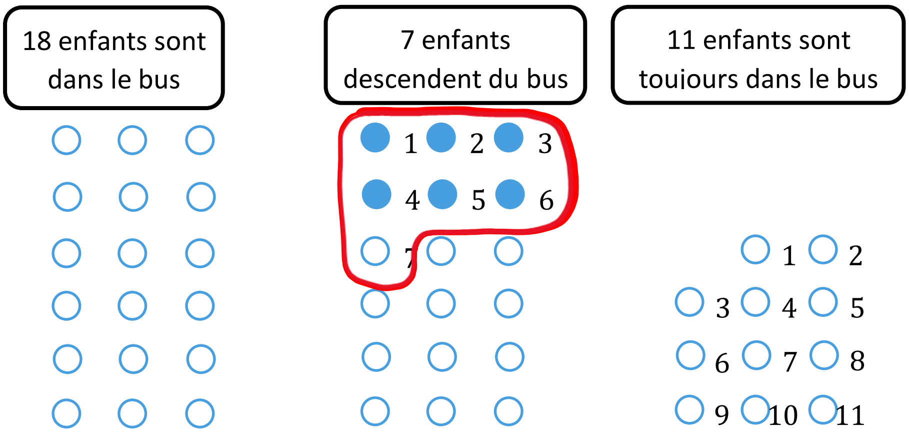
Des jeux de rôle[111], des gestes choisis[112] ou des représentations concrètes et/ou semi-concrètes[113] sont des outils pédagogiques qui permettent aux élèves de visualiser le problème et d'identifier les informations pertinentes en les aidant à concevoir comment les quantités sont liées les unes aux autres.

Proposez aux élèves d'autres exemples du même type de problème en utilisant des scénarios différents afin qu'ils puissent voir comment les quantités restent toujours reliées de la même façon, y compris quand la situation est différente. Montrez comment et pourquoi chaque nouveau problème appartient au même type de problème que vous enseignez. Suivez ces étapes pour chaque nouveau type de problème que vous introduisez.

L'exemple 5.1 montre comment ces étapes peuvent être mises en œuvre pour les problèmes de transformation, c'est-à-dire quand une donnée change au fil du temps. Ici, le problème verbal concerne des enfants qui descendent d'un bus et il s'agit de montrer comment ce nombre d'enfants change. Utilisez des jetons pour permettre aux élèves de visualiser ce problème. Ensuite, présentez deux autres problèmes de transformation aux élèves avec des scénarios différents, avec toujours une quantité qui change au fil du temps : dans un cas, elle augmente et dans l'autre, elle diminue.

Exemple 5.1. Présentation d'un problème de transformation.

<u>Énoncé avec toutes les quantités</u> Il y avait 18 enfants dans le bus. 7 enfants sont descendus du bus au premier arrêt. 11 enfants sont toujours dans le bus.	<u>Problème verbal avec une quantité manquante</u> Il y avait 18 enfants dans le bus. 7 enfants sont descendus du bus au premier arrêt. Combien d'enfants sont encore dans le bus ?



[18 jetons représentent les enfants dans le bus]

[L'enseignant et les élèves comptent et retirent 7 jetons]

[L'enseignant et les élèves comptent le nombre d'enfants restant dans le bus]

Autres exemples de problèmes de transformation :

Augmentation de la quantité	Diminution de la quantité
Le rosier a 15 fleurs épanouies. Puis 12 autres ont fleuri. Combien de roses sont en fleurs sur le rosier maintenant ?	Vendredi dernier, Selina avait 24 cupcakes. À son anniversaire, le lendemain, elle et ses amis en ont mangé 16. Combien de cupcakes reste-t-il à Selina après son anniversaire ?

2. Enseigner aux élèves une méthode de résolution pour chaque type de problème

Présentez une méthode de résolution à l'aide d'un exemple résolu. Expliquez le processus de résolution du type de problèmes et reliez les informations pertinentes de l'énoncé du nouveau problème aux données de l'exemple résolu. Énoncez à voix haute les décisions qui ont été prises à chacune des étapes de résolution du problème. Montrez ensuite comment appliquer la méthode de résolution en résolvant un problème avec les élèves à l'aide de cette méthode. Expliquez chacune des décisions que vous prenez et posez des questions guidées aux élèves pour les impliquer dans la résolution du problème. Les méthodes de résolution peuvent inclure des schémas, des diagrammes, des tableaux ou des équations qui sont directement liés au type de problème en associant et en présentant les sujets mathématiques sous-jacents au problème verbal[114].

Les élèves peuvent avoir besoin d'un soutien continu pour terminer un processus long de plusieurs étapes afin de résoudre chaque type de problème[115]. Proposez aux élèves un guide détaillant les étapes à suivre lorsqu'ils résolvent des problèmes verbaux. Certaines parties de ce guide peuvent s'appliquer à la compréhension de l'énoncé en amont de la résolution avec des phrases comme « lire le problème », « identifier le type de problème », « identifier la question » et « repérer les informations pertinentes ». D'autres parties du guide peuvent être orientées vers le choix d'une méthode de solution spécifique au type de problème. Au fur et à mesure que les élèves deviennent plus à l'aise dans la résolution des problèmes, supprimez progressivement l'utilisation de ces guides visuels afin que les élèves n'en deviennent pas trop dépendants.

L'exemple 5.2 montre comment une enseignante résout un problème de groupes de même taille et utilise un dessin simple pour faciliter la résolution du problème. L'enseignante se réfère à un guide qui décrit les étapes permettant de résoudre les problèmes avec des groupes de même taille.

Exemple 5.2. Enseignante du deuxième cycle du primaire (CE2 à la 6e) qui réfléchit à voix haute à la façon dont elle met en place et résout un problème de groupes de même taille à l'aide d'un guide.

Maïssa a acheté des beignets pour ses amis. Chaque boîte de beignets contient 6 beignets. Si elle a acheté 24 beignets, combien de boîtes a-t-elle achetées ?

Enseignante : – *Le guide demande de lire le problème. (L'enseignante lit le problème.) Ce problème concerne des beignets. Quelle est la question posée ?*

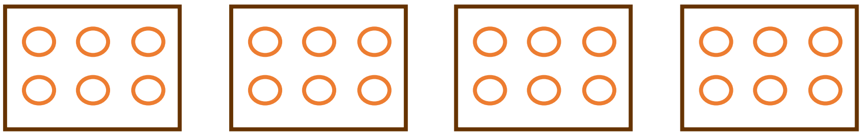
Élèves : – *Combien de cartons a-t-elle achetés ?*

Enseignante : – *Exact. Le problème demande combien de boîtes ou de groupes de beignets elle a apportés. Le problème nous dit qu'il y en a*

6 dans chaque boîte et qu'elle en a apporté 24. Est-ce un problème de groupes de même taille ?
Élèves : *– Oui.*
Enseignante : *– Comment savez-vous qu'un problème verbal est un problème de groupes de même taille ?*
Élèves : *– Dans un problème de groupes de même taille, on a un nombre de groupes, on sait que la taille de chaque groupe est la même et on a un nombre total d'éléments. Dans ce problème, nous essayons de trouver le nombre de groupes ou de boîtes de beignets.*
Enseignante : *– Oui ! Combien en a-t-elle acheté en tout ?*
Élèves : *– 24.*
Enseignante : *– Super. C'est ça. Pour déterminer ce que nous devons faire ensuite, voyons ce que propose le guide. Il est indiqué qu'il faut écrire les informations dont vous avez besoin pour résoudre le problème. Que savons-nous ?*
Élèves : *– Nous savons que chaque boîte contient 6 beignets. Nous devons déterminer le nombre de boîtes dont nous avons besoin pour obtenir 24 beignets.*
Enseignante : *– L'étape suivante du guide propose de dessiner les groupes pour trouver le nombre manquant. Que feriez-vous pour dessiner les groupes ?*
Élèves : *– Je commence par dessiner une boîte avec 6 beignets. J'utilise des cercles pour représenter les beignets. Ensuite, je dessine une autre boîte avec 6 autres beignets.*
Enseignante : *– Voyons si nous en avons déjà 24. Qu'est-ce qui est égal à 6 + 6 ?*
Élèves : *– Non, 6+6 = 12.*
Enseignante : *– L'étape suivante du guide indique de continuer à dessiner les groupes jusqu'à ce que vous trouviez le nombre cherché. Donc, nous devons continuer. Si on ajoute une autre boîte de 6 beignets, combien de beignets avons-nous ?*
Élèves : *– 18. Nous n'avons pas encore terminé. Dessinons une autre boîte.*
Enseignante : *– Super. Essayons ça. Nous avons maintenant 4 boîtes de 6 beignets. Est-ce que 4 boîtes de 6 beignets font 24 beignets ?*
Élèves : *– Oui ! 6 + 6 + 6 + 6 = 24. Nous avions besoin de 4 boîtes de beignets.*

Enseignante : – *Oui ! C'est exact. Pour résoudre ce problème, nous avons utilisé des additions répétées. Nous avons additionné le nombre de beignets dans chaque boîte jusqu'à ce que nous atteignions 24. La dernière étape consiste à écrire la réponse.*
Élèves : – *Écrivons « 4 boites » pour la réponse.*
Enseignante : – *Excellent travail !*

6 beignets dans une boite
24 beignets en tout



6 + 6 + 6 + 6

12 18 24

4 boites

Remarque : selon ce que les élèves savent faire avec l'addition et la multiplication, l'enseignant peut relier l'addition répétée à la multiplication. Les enseignants pourraient également se référer à une table de multiplication comme support supplémentaire pour les élèves faisant le lien entre l'addition répétée et la multiplication.

3. Développer la capacité des élèves à identifier les informations pertinentes dans les problèmes verbaux en présentant les informations du problème de manière différente.

Une fois que les élèves peuvent reconnaître et résoudre les problèmes d'un même type les plus accessibles, présentez des problèmes verbaux du même type qui sont moins familiers afin que les élèves élargissent leur compréhension de ce type de problème[116]. De l'avis du panel, il est essentiel d'inclure des problèmes faisant varier la quantité inconnue pour aider les élèves à comprendre la structure mathématique de chaque type de problème. Certains problèmes peuvent sembler différents car nécessitent des étapes supplémentaires pour la résolution ou incluent des informations numériques non pertinentes ou présentent les informations à l'aide d'un graphique ou d'un diagramme[117]. Exposer les élèves à une variété de problèmes leur permet de transférer plus facilement leur compréhension d'un type de problèmes à un plus large éventail de problèmes[118]. L'exemple 5.3 donne des exemples de problèmes de transformation et de problèmes de proportionnalité qui peuvent être moins familiers aux élèves.

Exemple 5.3. Types de problèmes avec des éléments moins familiers.

Problèmes de transformation

Le résultat final est inconnu

Ana avait 13 pommes rouges. Puis elle a donné 6 pommes à son voisin. Combien de pommes a-t-elle maintenant ?

La quantité modifiée est inconnue

Il y avait 24 personnes qui nageaient à la piscine. Certaines d'entre elles sont sorties pour le déjeuner. Maintenant, il y a 13 personnes dans la piscine. Combien de personnes sont sorties déjeuner ?

La quantité de départ est inconnue

Alice a donné 32 cartes de baseball à son frère et il ne lui en reste plus que 15. Avec combien de cartes de baseball a-t-elle commencé ?

En plusieurs étapes

Il y a 21 élèves à la table du déjeuner. Onze élèves se sont levés pour rendre leurs plateaux. Ensuite, 3 élèves sont allés aux toilettes. Combien d'élèves mangent encore à table ?

Avec des **informations non pertinentes**

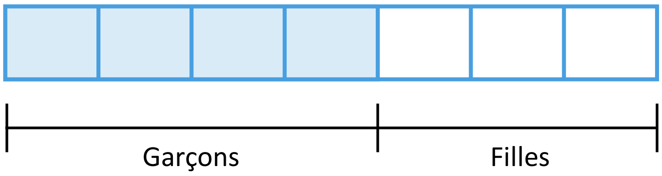
Il y a 21 élèves à la table du déjeuner et 4 adultes. Onze élèves se sont levés pour rendre leurs plateaux. Combien d'élèves mangent encore à table ?

Problèmes de proportionnalité

Calcul d'une 4^e^ proportionnelle

Zahara a acheté de la nourriture au marché fermier. Pour chaque concombre qu'elle achetait, elle achetait 3 tomates. Si elle a acheté 12 tomates, combien de concombres a-t-elle achetés ?

Données présentées à l'aide d'un tableau/graphique/diagramme
Dans la classe de Mme Walker, il y a plus de garçons que de filles. Vous trouverez ci-dessous un diagramme représentant le nombre de garçons par rapport au nombre de filles. S'il y a 12 garçons dans la classe, combien y a-t-il de filles ?



Avec des informations non pertinentes
Sally adore jardiner. Elle entretient 5 jardins de fleurs et 1 potager. Dans un de ses jardins de fleurs, pour 5 marguerites plantées, elle plante aussi 1 rose. Si elle a planté 3 roses, combien de marguerites a-t-elle plantées ?

En plusieurs étapes
Sally adore planter des fleurs dans son jardin. Pour 5 marguerites plantées, elle plante également 1 rose. Si elle a planté 3 roses, combien de fleurs a-t-elle plantées en tout ?

Les élèves peuvent avoir besoin d'un soutien continu pour identifier les quantités utiles pour résoudre les problèmes une fois qu'ils ont appris plusieurs variantes de chaque type de problème. Cela peut être accompli en aidant les élèves à visualiser le problème en utilisant des représentations concrètes telles que des jetons ou des carrés fractionnaires, ou des représentations semi-concrètes telles que des tableaux ou des diagrammes illustrant des relations quantitatives.

Pour permettre aux élèves d'identifier les informations pertinentes d'un problème, l'enseignant peut les encourager à lire le problème plus d'une fois et à le reformuler avec leurs propres mots ; à se reporter à la question pour relier l'inconnu à l'information donnée dans le problème verbal et ainsi déterminer les données importantes. En relisant le problème, les élèves peuvent réussir plus facilement à différencier une information pertinente d'une information non pertinente[119]. Les enseignants peuvent demander aux élèves d'écrire, d'encercler ou de souligner les informations qui seront utilisées pour résoudre le problème et de rayer les informations qui ne sont pas utiles.

L'exemple 5.4 présente un problème de réunion. Dans ce problème, trois sortes de légumes sont combinées et des informations non pertinentes qui ne sont pas utiles pour résoudre le problème sont également données. Les problèmes avec des informations non pertinentes imposent aux élèves de réfléchir et de sélectionner les quantités utiles pour résoudre le problème correctement. Dans cet exemple, l'enseignant utilise des jetons et des images de légumes pour que les élèves visualisent les informations pertinentes.

Exemple 5.4. L'enseignant guide les élèves en identifiant les informations pertinentes et en utilisant une représentation concrète pour visualiser l'énoncé.

Énoncé du problème verbal

Roger possède 6 pommiers et un potager. Il a cueilli 3 carottes, 9 oignons et 4 pommes de terre. Combien de légumes a-t-il cueillis ?

Enseignant : – *Dans ce problème, il y a beaucoup d'informations. Utilisons ces jetons pour représenter les informations pertinentes du problème afin de résoudre le problème. De quoi parle le problème ?*

Élève 1 : – *Des pommiers et des légumes de Roger.*

Enseignant : – *Super. Lisons la question « Combien de légumes a-t-il cueillis ? » Revenez sur le problème et voyez ce qu'il dit sur les légumes.*

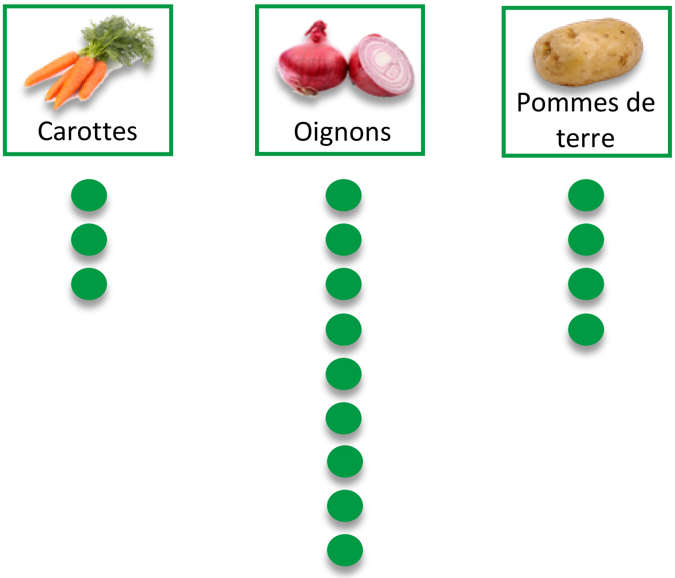
Élève 2 : – *Je vois qu'il est question d'un potager.*

Enseignant : – *Exact. Regardez le problème, savez-vous quels légumes il a choisis ?*

Élève 2 : – *Des carottes, des oignons et des pommes de terre.*

Enseignant : – *C'est vrai, il a cueilli des carottes, des oignons et des pommes de terre. Utilisons-nous toutes les informations de ce problème ou y a-t-il des informations non pertinentes que nous devons ignorer ?*

Élève 2 : – *Il a également 6 pommiers.*



Enseignant : – *Exact. Les pommiers sont-ils des légumes ? Le fait de savoir combien de pommiers il possède nous aide-t-il à répondre à la question sur les légumes ?*

Élève 2 : – *Non.*

Enseignant : – *Bien, que faisons-nous des informations non pertinentes ?*

Élève 2 : – *Nous les ignorons.*

Enseignant : – *Utilisons des jetons pour visualiser le problème. Chaque nom de légume est sur une carte avec une photo du légume. Représentons le nombre de chaque légume avec des jetons. Combien y a-t-il de carottes ? Relisez le problème si vous en avez besoin.*

Élève 3 : – *Il y en a 3.*

Enseignant : – *Comptons 3 jetons pour les carottes, 1, 2, 3. Combien d'oignons ? Relisez sur le problème si vous en avez besoin.*

Élève 1 : – *Il y en a 9.*

Enseignant : – *Comptons 9 jetons pour les oignons, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Combien y a-t-il de pommes de terre ? Relisez le problème si vous en avez besoin.*

Élève 2 : – *Il y en a 4.*

Enseignant : – *Revenons au problème. Quelle était la question ?*

Élève 1 : – *Combien de légumes a cueillis Roger ?*

Enseignant : – *Pour savoir combien de légumes il a cueillis, que faisons-nous ?*

Élève 1 : – *Mettons-les ensemble et ajoutons les légumes.*

Enseignant : – *Exact. Ce problème consiste à additionner les légumes. Nous pouvons voir ici que nous avons 3 carottes, 9 oignons et les 4 pommes de terre. Pour résoudre le problème, nous additionnons le nombre de légumes. Répondons à la question « Combien de légumes a-t-il cueillis ? » et comptons.*

Élève 1 : – *Roger a cueilli 16 légumes*.

4. Expliquer le vocabulaire ou le langage souvent utilisés dans les problèmes verbaux pour permettre aux élèves de comprendre le problème

Lorsque vous présentez pour la première fois des problèmes verbaux, choisissez des problèmes accessibles, c'est-à-dire que tous les mots de l'énoncé devraient être familiers aux élèves. Cependant, à mesure que les élèves apprennent à résoudre ce type de problème, à identifier la question et les stratégies efficaces pour trouver la solution, les problèmes verbaux devraient inclure un langage plus complexe. Enseignez aux élèves le sens des mots et des constructions linguistiques qu'ils peuvent trouver difficiles dans les problèmes verbaux.

Les mots difficiles peuvent être expliqués avant qu'ils ne soient présentés dans un problème verbal pour permettre aux élèves de se préparer à les comprendre lorsqu'ils seront utilisés dans des problèmes verbaux[120]. Avant de commencer la séance, repérez quels mots seront essentiels pour comprendre le problème. Portez une attention particulière aux mots qui se rapportent les uns aux autres ou partagent une structure commune pour aider les élèves à séparer les informations pertinentes du problème de celles qui ne le sont pas. Expliquez le sens des mots et continuez à en discuter pendant la résolution de problèmes pour consolider leur sens.

Le tableau 5.1 présente plusieurs types de mots et de constructions linguistiques utilisés dans les problèmes verbaux que les élèves peuvent trouver difficiles à comprendre lorsqu'ils essaient de donner du sens au problème. Cela peut inclure des mots qui sont familiers aux élèves mais qui ont des significations différentes dans un contexte de problème verbal, des catégories de mots et leurs sous-catégories, des mots qui impliquent des comparaisons et des mots qui signalent des événements associés aux types de problèmes que vous enseignez. L'enseignement de ces mots permettra aux élèves de séparer les informations pertinentes de celles qui ne le sont pas.

Tableau 5.1. Clarifier les mots présentés dans les problèmes verbaux avant que les élèves ne résolvent le problème.

Objectifs	**Exemple de problème**	**Pourquoi s'intéresser à ces mots ?**	**Que faire**
Mots inconnus ou mots familiers qui peuvent prêter à confusion en fonction du contexte	L'école primaire Brown organise une course de relais de 3 kilomètres. Chaque manche de la course est de ½ kilomètre. Combien d'enfants faut-il dans chaque équipe ?	Dans ce problème, les élèves peuvent ne pas comprendre le sens du mot « relais » ni que cela sous-entend que la course comprend plusieurs parties et que des équipes d'enfants doivent être constituées. Les élèves sont susceptibles de connaître la signification du mot « manche » (en tant que partie d'un vêtement), mais peuvent ne pas comprendre ce que signifie la manche d'une course.	Enseignez aux élèves qu'un relais est une course comprenant plusieurs parties. Expliquez qu'elles sont souvent appelées manches et qu'un enfant ne court que pendant une partie ou une manche d'une course. Donc, s'il y a six manches, il faut six enfants dans chaque équipe.

Objectifs	**Exemple de problème**	**Pourquoi s'intéresser à ces mots ?**	**Que faire**
Catégories et éléments qui les composent.	Sasha a 6 animaux de compagnie. Quatre de ces animaux de compagnie sont des tortues et les autres sont des chiots. Combien de chiots Sasha a-t-elle ?	Les élèves ne savent peut-être pas que les animaux de compagnie sont une catégorie qui peut inclure de nombreux animaux tels que les tortues et les chiots. Les catégories se trouvent souvent dans les problèmes de proportionnalité et les problèmes de réunion.	Enseignez aux élèves les catégories ou les mots s'y rapportant. Pour chaque nouveau problème, discutez à l'avance de la catégorie dont il sera question (par exemple, animaux de compagnie, tortues et chiots).
Mots qui comparent deux quantités : plus, moins, plus vieux, plus jeune, plus grand,	Willa mesure 110 cm. Renaldo mesure 20 cm de moins que Willa. Quelle est la taille de Renaldo ?	Les élèves doivent comprendre que « plus court » signifie « moins de centimètres » ou « un plus petit nombre de centimètres ».	Enseignez ces mots aux élèves en vous concentrant sur la façon dont la quantité change.

Objectifs	**Exemple de problème**	**Pourquoi s'intéresser à ces mots ?**	**Que faire**
plus court, plus gros, plus petit, plus chaud et plus froid.	La sœur d'Ava est plus âgée de 8 ans. Ava a 6 ans. Quel âge a sa sœur ? Ava a 6 ans et sa sœur a 14 ans. De combien d'années Ava est-elle plus jeune que sa sœur ?	Les élèves doivent également apprendre des mots de comparaison qui se rapportent les uns aux autres. Dans ces exemples, les deux problèmes consistent à comparer l'âge, mais un problème utilise les mots « plus âgée » et l'autre problème utilise les mots « plus jeune ».	Associez des problèmes verbaux similaires en utilisant des mots de comparaison réciproques pour aider les élèves à comprendre le sens qu'il convient de leur donner.

5. Proposer plusieurs types de problèmes durant l'intervention, en ajoutant, aux problèmes de types nouvellement appris, des problèmes de types connus depuis longtemps

Une fois qu'un type de problème a été enseigné, reprenez les différents types de problèmes précédemment appris tout au long des séances afin que les élèves n'oublient pas les types de problèmes qu'ils ont appris. En révisant des problèmes déjà appris, les élèves s'exercent à différencier les types de problèmes au fur et à mesure qu'ils en apprennent de nouveaux. Inclure un mélange de problèmes tout au long des interventions et proposer ainsi des révisions cumulatives.

Incluez une activité où les élèves identifient et nomment des types de problèmes sans les résoudre. Rappelez aux élèves qu'il convient de réfléchir aux différences entre les types de problèmes et à la façon de distinguer un type de problème d'un autre. Ces exercices permettent aux élèves de mieux identifier et distinguer les différents types de problèmes et renforcent l'idée qu'il est important, à chaque nouveau problème, de lire soigneusement l'énoncé et de prendre le temps de la réflexion avant de le résoudre[121]. Les élèves peuvent avoir besoin d'aide pour se souvenir des caractéristiques principales de différents types de problèmes, comme d'un guide énumérant les caractéristiques d'un problème ou d'un geste qui évoque l'action mise en œuvre dans le problème.

Les éventuels obstacles et comment les surmonter

« Ce type d'enseignement portant sur les problèmes verbaux ne fait pas partie de mon programme. Dois-je développer mes propres outils ? »

Conseil : Le panel ne suggère pas aux enseignants de créer des outils qui incluent ce type d'enseignement ou ces types de problèmes verbaux. Au lieu de cela, le panel suggère d'utiliser cette recommandation comme ligne directrice pour évaluer les programmes à adopter. Travaillez avec une équipe, y compris un formateur en mathématiques ou un éducateur spécialisé, pour repérer si un programme respecte les étapes de cette recommandation.

« Je ne veux pas enseigner à mes élèves une méthode spécifique pour résoudre un type particulier de problème mais plutôt les encourager à élaborer leur propre méthode de résolution. »

Conseil : Bien que le fait de demander aux élèves de développer leurs propres stratégies de résolution puisse avoir du sens et se montrer utile, les élèves en intervention sont parfois moins équipés pour générer une stratégie de solution qui soit précise et appropriée pour les problèmes verbaux[122]. En enseignant des stratégies de solution spécifiques, vous offrez aux élèves un moyen de progresser avec succès dans le processus de résolution de problèmes afin qu'ils puissent plus tard développer leurs propres méthodes de solution.

« Mes élèves ne savent souvent pas résoudre les opérations permettant de trouver la réponse aux problèmes verbaux de notre programme. »

Conseil : Avant d'introduire une stratégie pour résoudre un type de problème, assurez-vous que les élèves possèdent les compétences préalables nécessaires pour pouvoir appliquer la méthode de résolution du problème. Passez en revue et intégrez la pratique de ces compétences préalables tout au long de l'enseignement axé sur les problèmes verbaux. Les élèves peuvent également résoudre des problèmes en montrant qu'ils ont compris les concepts du problème ainsi que sa structure et qu'ils ont identifié les étapes nécessaires pour sa résolution. Dans ce cas, l'utilisation d'outils, comme une calculatrice, peut leur permettre d'effectuer des opérations mathématiques. Également, l'enseignant peut remplacer les nombres de l'énoncé par d'autres qui sont familiers aux élèves pour faciliter la résolution du problème par les élèves.

« J'utilise la stratégie des mots-clés, mais je n'ai pas l'impression que mes élèves comprennent les problèmes verbaux. »

Conseil : Évitez d'enseigner des mots-clés qui lient des mots spécifiques à des opérations. Les mots-clés suppriment le besoin de lire et de comprendre l'ensemble du problème et orientent plutôt les élèves vers la mise en œuvre d'une opération mathématique (addition, soustraction, multiplication, division) souvent erronée[123]. Dans le tableau 5.2, notez comment le mot-clé induit l'élève en erreur pour de nombreux problèmes. Déterminez la bonne opération en comprenant la question posée par le problème. De plus, comme l'enseignement des mots-clés encourage les élèves à rechercher des mots ou des phrases spécifiques sans tenir compte des autres informations du problème, les problèmes verbaux ne contenant pas les mots-clés enseignés plongent souvent les élèves dans l'incapacité de les résoudre. Enfin, les problèmes qui exigent plusieurs étapes de résolution incluent probablement plus d'un mot-clé enseigné, ce qui cause encore plus de confusion.

Tableau 5.2. Exemples de mots-clés associés à une opération et pourquoi ils ne sont pas opérants

Mots-clés	Opération supposée liée au mot-clé	Exemple de problème dans lequel la méthode des mots-clés échoue	Exemple d'opération fausse
En tout	addition	Alice a acheté 4 cartons d'œufs avec 12 œufs dans chaque carton. Combien d'œufs Alice a-t-elle en tout ?	4 + 12 = 16

Mots-clés	Opération supposée liée au mot-clé	Exemple de problème dans lequel la méthode des mots-clés échoue	Exemple d'opération fausse
Plus	addition	Colin avait des crayons. Ensuite, il a acheté 12 crayons de plus. Maintenant, il a 90 crayons. Avec combien de crayons Colin a-t-il commencé ?	90 + 12 = 102
Moins	soustraction	Paulo a cueilli des pommes. Zach a cueilli 12 pommes de moins que Paulo. Si Zach a cueilli 20 pommes, combien de pommes Paulo a-t-il cueillies ?	20 – 12 = 8
Rester	soustraction	Liz a partagé 55 bonbons à parts égales avec 3 amis. Après le partage, combien de bonbons restait-il ?	55 – 3 = 52
Chaque	multiplication	Miles avait 3 plateaux de blocs de construction avec le même nombre de blocs sur chaque plateau. Si Miles avait 75 blocs au total, combien y en avait-il sur chaque plateau ?	$75 \times 3 = 225$
Double	multiplication	Margaret a acheté le double du nombre de chansons que sa sœur. Si Margaret a acheté 12 chansons, combien de chansons sa sœur a-t-elle achetées ?	$12 \times 2 = 24$
Partager	division	Sal a collecté 18 cartes à partager également entre ses amis. Après partage, il lui restait 3 cartes. Combien de cartes Sal a-t-il partagées ?	$18 \div 3 = 6$

Mots-clés	Opération supposée liée au mot-clé	Exemple de problème dans lequel la méthode des mots-clés échoue	Exemple d'opération fausse
Diviser	division	Cam a divisé 5 feuilles de papier en quatre. Combien de feuilles de papier Cam a-t-il maintenant ?	$5 \div 4 = 1+\frac{1}{4}$

« Mes élèves prennent souvent tellement de temps à dessiner chaque élément du problème qu'ils n'ont même pas le temps de commencer à résoudre le problème. »

Conseil : Enseignez aux élèves comment dessiner des croquis plus simples, avec, par exemple, des bâtons pour représenter des personnes ou des cercles pour représenter des pierres ou des pommes (voir l'exemple 5.2 où les cercles représentaient des beignets). Un croquis simple montre les relations quantitatives et aide les élèves à identifier la question posée par le problème et ce qu'ils doivent faire pour le résoudre[124]. Il peut également être utile d'utiliser des représentations concrètes si les élèves ont des problèmes de motricité fine ou d'habiletés manuelles[125]. Faites un lien direct explicite entre les dessins ou d'autres représentations et l'équation.

Recommandation 6

Recommandation 6 : activités en temps limité

Proposer régulièrement des activités en temps limité pour améliorer la fluence mathématique des élèves

Introduction

Chacune des recommandations de ce guide a comme objectif de permettre aux élèves de résoudre efficacement des problèmes de façon précise, et de s'adapter aux différentes situations qu'ils peuvent rencontrer. Cette sixième recommandation propose un moyen différent d'y parvenir avec comme objectif spécifique de développer la ***fluence****, en proposant des activités en temps limité se déroulant sur des temps courts. Ces activités en temps limité durent entre 1 et 5 minutes et ne doivent pas constituer tout l'objet d'une intervention : elles sont en fait une composante à intégrer à l'intervention et peuvent se déployer sur plusieurs séances. Intégrez des activités en temps limité à une intervention une fois que les élèves ont travaillé sur un concept au cours des précédentes séances. N'utilisez pas d'activités en temps limité pour présenter et enseigner des concepts et/ou des opérations mathématiques.*

Être capable de mobiliser des compétences en calcul basique (addition, soustraction, multiplication et division) n'est pas facile pour les élèves qui éprouvent des difficultés en mathématiques[126]. Si ces compétences ne sont pas acquises, les élèves auront du mal à suivre les explications de leurs enseignants sur de nouveaux sujets mathématiques[127]. La mobilisation de ces compétences de manière automatique libère l'énergie cognitive des élèves pour leur permettre de comprendre des tâches mathématiques relativement complexes et pour être capables d'exécuter des procédures mathématiques nécessitant plusieurs étapes[128]. C'est pourquoi la construction des **automatismes** de calcul chez les élèves est l'un des (nombreux) objectifs importants d'une intervention[129].

En plus des compétences en calcul basique, les activités en temps limité peuvent aborder d'autres sous-tâches mathématiques importantes permettant de résoudre des problèmes complexes[130]. Cela peut inclure, par exemple, le rappel des équivalences pour les fractions de référence 1/2 et 1 (ou 1/1) qui permettent aux élèves de comparer la magnitude de certaines fractions ou de résoudre les problèmes de proportionnalité plus efficacement. Ou encore, évaluer et estimer rapidement la valeur de position d'un chiffre, ce qui permet aux élèves de déterminer si le regroupement est nécessaire lors de la résolution de problèmes d'addition et de soustraction à plusieurs chiffres. Le but de ces activités est d'amener les élèves vers une exécution précise et efficace de ces petites tâches mathématiques afin que ces compétences soient facilement mises en œuvre lorsqu'elles sont nécessaires à la résolution d'un problème.

Le panel ne recommande pas de se contenter de proposer aux élèves de travailler en temps limité sur des feuilles d'exercices ou de les installer en salle informatique pour qu'ils utilisent un logiciel de calcul, sans avoir auparavant construit leur apprentissage. Une activité limitée dans le temps peut exiger des élèves qu'ils fassent des commentaires immédiats, mais aussi avoir comme objectif d'améliorer certaines compétences particulières ou d'exposer les élèves à des exercices de plus en plus difficiles. Les activités en temps limité peuvent être structurées de façon à ce que l'accent soit mis sur les automatismes permettant d'effectuer des calculs de base ou sur le renforcement de la maîtrise d'autres sous-tâches mathématiques.

Le WWC et le groupe d'experts ont attribué un niveau de preuve solide à cette recommandation en se basant sur 27 études portant sur l'efficacité des activités ayant comme objectif de mobiliser les compétences en calcul basique et d'améliorer l'exécution fluide d'autres tâches impliquées dans la résolution de problèmes complexes[131]. Parmi elles, vingt et une études répondent aux normes WWC sans réserve[132], et six études répondent aux normes WWC avec réserves[133]. Voir l'annexe C pour une justification détaillée du niveau de preuve associé à la recommandation 6.

Les étapes de cette recommandation portent sur la façon de mettre en place de façon systématique des activités en temps limité qui favorisent la fluence et la réussite des élèves lors de ces activités. Ce chapitre décrit des stratégies, des exemples et des outils qui permettent aux enseignants d'utiliser efficacement ces activités pour améliorer la fluence des élèves en difficulté.

Comment mettre en œuvre la recommandation

1. Identifier les sujets appris lors des activités précédentes afin d'améliorer la fluence et prévoir un calendrier

Lorsque vous planifiez des activités pour améliorer la fluence, réfléchissez à ce dont les élèves auront besoin pour comprendre et appliquer plus facilement les mathématiques qu'ils sont en train d'apprendre. Analysez le sujet mathématique qui est au centre de l'intervention et demandez-vous si des compétences de calculs et/ou d'autres sous-tâches pourraient permettre aux élèves de comprendre ce sujet mathématique plus facilement. Réfléchissez également aux stratégies ou procédures complexes que les élèves devront apprendre. Divisez-les en une série de petites étapes nécessaires pour comprendre et résoudre avec précision les problèmes. Planifiez des activités pour favoriser la maîtrise de l'un de ces domaines. Le tableau 6.1 fournit des exemples de sujets d'interventions et les différents objectifs que l'on peut leur associer et qui concernent la fluence.

Tableau 6.1. Exemples d'activités pouvant favoriser la maîtrise de divers sujets abordés au cours d'une intervention

Sujet d'intervention	**Objectifs des activités en temps limité**	**Pertinence pour l'intervention**
Les fractions (CM1 et au-delà)	Compétences de calcul sur les multiplications.	Utile pour trouver des fractions équivalentes pour l'addition et la soustraction de fractions.
	Équivalences pour les fractions de référence 1/2 et 1 (ou 1/1).	Utile pour utiliser des fractions de référence dans le but de comparer ou ordonner des fractions ou pour estimer la magnitude d'une fraction en la plaçant sur une droite numérique.
Valeur de position et addition et soustraction de	Compétences de calcul sur les additions et les soustractions.	Utile pour que les élèves puissent efficacement additionner ou soustraire chaque valeur de position.

nombres à plusieurs chiffres (CE1 et au-delà)	Évaluer l'opération pour déterminer si le regroupement est nécessaire.	Utile pour que les élèves puissent déterminer si le regroupement est nécessaire en tant que pratique standard lors de l'addition ou de la soustraction de nombres à plusieurs chiffres.

Remarque : cette liste n'est pas exhaustive.

Choisissez un sujet à développer au fil du temps. Pour chaque sujet, prévoyez un horaire pour présenter et mener l'activité en temps limité qui a comme objectif d'améliorer la fluence. Au début, choisissez des exercices faciles. Pour permettre aux élèves de rester impliqués lors de l'activité, augmentez la difficulté des exercices à mesure qu'ils maîtrisent mieux les calculs les plus faciles. Par exemple, si vous travaillez sur des additions, vous pouvez débuter par ajouter 1 ou calculer des doubles. Ensuite, augmentez la difficulté pour inclure d'autres additions plus difficiles. Si vous travaillez sur des multiplications, par exemple, concentrez-vous d'abord sur les tables de zéro et de un. Intégrez ensuite les tables de dix et de cinq, et ainsi de suite.

Au fur et à mesure que vous passez à des sujets plus difficiles, continuez d'inclure des sujets plus faciles afin que les élèves fassent la distinction entre des types de problèmes ou des ensembles de faits. De cette façon, augmentez progressivement la difficulté pour inclure toute la gamme des calculs mathématiques comprenant l'addition et la soustraction. Le panel estime que la pratique de calculs mixtes développe la capacité des élèves à distinguer les opérations. Présentez le sujet suivant une fois que les élèves ont travaillé sur un sujet pendant plusieurs semaines et qu'ils ont montré qu'ils le maitrisaient.

2. Choisir l'activité et le matériel pédagogique à utiliser durant l'activité en temps limité et définir des procédures claires

Les activités en temps limité sont brèves (généralement 1 à 5 minutes) et nécessitent que les élèves génèrent de nombreuses réponses correctes dans ce court laps de temps[134]. Les activités qui favorisent la fluence peuvent être réalisées à l'aide de cartes flash, de programmes informatiques ou de feuilles d'exercices[135]. À l'aide de ce matériel, les activités peuvent être structurées de façon à ce que les élèves travaillent en groupe ou individuellement. Incorporez périodiquement des fonctionnalités ludiques, telles que le calcul du score ou la coopération des élèves en équipe pour augmenter leur score.

Les activités de soutien à la fluence sont bien adaptées aux contextes d'intervention en petits groupes. Mettez en place l'activité avec des procédures claires sur qui répond et quand. Par exemple, les élèves peuvent répondre chacun à son tour en faisant un tour de table, ou l'enseignant peut interroger les élèves au hasard. Ou encore, tous les élèves peuvent répondre en même temps. Les élèves peuvent répondre oralement, avec des cartes-réponse ou sur une ardoise ou le tableau, ou avec des gestes ou des signes de la main (par exemple, en touchant ou en pointant). Si vous utilisez des feuilles d'exercices, discutez des réponses des élèves après la fin de l'exercice et demandez aux élèves de corriger et d'expliquer leurs erreurs.

3. S'assurer que les élèves disposent d'une stratégie efficace à mettre en œuvre lorsqu'ils s'exercent à une activité en temps limité

Planifiez des activités en temps limité qui se concentrent sur le contenu déjà appris[136]. Incluez dans ces activités les stratégies que vous souhaitez que les élèves mettent en œuvre durant les autres parties de l'intervention. Par exemple, lors d'une intervention portant sur les additions, l'activité en temps limité peut être organisée autour des combinaisons de nombres comme les doubles, les doubles plus un ou des additions de 10 avec d'autres nombres. Donnez des informations sur les stratégies de comptage utiles pour l'addition et la soustraction. Assurez-vous que les élèves savent utiliser ces stratégies avant de commencer l'activité limitée dans le temps[137].

Avant de commencer l'activité limitée dans le temps, rappelez aux élèves les stratégies qu'ils sont censés connaitre[138]. Par exemple, rappeler aux élèves la stratégie du « double plus un » avant de commencer l'activité limitée dans le temps peut permettre aux élèves d'utiliser cette stratégie lorsqu'ils doivent trouver le résultat de 6 + 7. Si compter à partir du plus grand nombre a été enseigné comme stratégie pendant l'intervention, rappelez aux élèves comment l'utiliser avant de commencer l'activité.

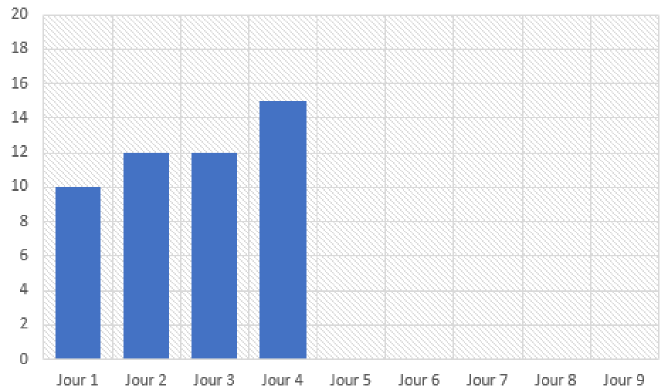
4. Encourager et motiver les élèves à travailler davantage en leur demandant de suivre leurs progrès

Les activités qui ont comme but d'améliorer la fluence doivent être conçues de façon à ce que les élèves génèrent de nombreuses réponses correctes en peu de temps[139]. Rappelez aux élèves que le but est de produire des réponses exactes.

Pour que les élèves restent concentrés et motivés durant ces activités, demandez-leur d'enregistrer leurs scores au fil du temps sur un tableau ou un graphique. Si les élèves voient leurs scores s'améliorer au fil du temps, alors ils peuvent se sentir plus enthousiastes et enclins à se fixer des objectifs et à travailler davantage. Les objectifs comme « atteindre ou battre » un score de fluence précédemment obtenu peuvent être définis au niveau individuel (pour chaque élève) ou au niveau du groupe de l'intervention. Travailler vers un objectif en tant que groupe peut réduire la pression sur les élèves. Si vous suivez les progrès individuellement plutôt qu'en groupe, assurez-vous que les graphiques restent confidentiels.

L'exemple 6.1 montre un graphique pour 4 jours d'activités en temps limité. Les élèves ont battu leurs scores au cours des jours 1, 2 et 4. Ils ont atteint leur score pour le jour 3 (les scores des jours 2 et 3 étaient de 12). L'objectif est d'atteindre ou de battre le score précédent, et les élèves y sont parvenus chaque jour car les scores n'ont pas diminué.

Exemple 6.1. Graphique des scores pour les activités de fluence en temps limité.



5. Commenter immédiatement la réponse de l'élève en lui demandant de corriger ses erreurs à l'aide d'une stratégie efficace

Lorsqu'ils utilisent des cartes flash ou d'autres activités qui permettent la rétroaction immédiate d'un enseignant, les élèves peuvent s'autocorriger avant que la rétroaction ne soit donnée, ce qui, selon le panel, favorise la fluence. Si les élèves ne se corrigent pas eux-mêmes, demandez-leur immédiatement de corriger leur mauvaise réponse et expliquez pourquoi la nouvelle réponse est correcte. Si l'élève a du mal à comprendre, rappelez-lui la stratégie efficace qu'il a apprise. L'élève doit utiliser la stratégie enseignée et corriger sa réponse avant de poursuivre[140].

Souvent, les logiciels déployés sur ordinateur récompensent les élèves en affichant des feux d'artifice ou de jolies images lorsque leur réponse est correcte ; lorsque leur réponse est incorrecte, un buzzer apparait ou l'écran est rafraîchi et propose à nouveau le même problème. Si les élèves ont besoin d'une aide supplémentaire, des didacticiels instantanés sont souvent intégrés. Les programmes informatiques fournissent donc aux élèves une rétroaction immédiate. Sélectionnez des logiciels qui demandent aux élèves de corriger leurs propres erreurs avant de passer au problème suivant.

Une rétroaction immédiate n'est pas toujours possible avec les feuilles d'exercices, même en petits groupes. De l'avis du panel, lorsqu'ils travaillent avec des feuilles d'exercices, les enseignants devraient les noter et les retourner dès que possible, puis revoir avec les élèves les erreurs qu'il convient de corriger et les stratégies efficaces qui pourraient être utilisées. Lorsque les élèves corrigent leur travail, demandez-leur de vous expliquer la nouvelle solution. Si l'élève ne semble pas avoir de stratégie efficace pour trouver des réponses correctes, enseignez aux élèves cette stratégie.

Les éventuels obstacles et comment les surmonter

« Nous utilisons des feuilles d'exercices tous les jours, et mes élèves ne s'améliorent pas. »

Conseil : De l'avis du panel, donner uniquement des feuilles d'exercices en temps limité ne favorise pas la fluence. Utilisez les étapes de la recommandation pour réfléchir à la façon dont vous pourriez préparer vos élèves à réussir. L'activité limitée dans le temps est-elle associée à l'objectif de l'intervention ? Vos élèves ont-ils un moyen de trouver la réponse s'ils ne la connaissent pas de façon automatique ? Proposez-vous aux élèves des commentaires de manière immédiate et significative ? Les élèves observent-ils leurs propres progrès et se fixent-ils des objectifs ? Les activités qui soutiennent la fluence doivent tenir compte de ces éléments pour être efficaces.

« Certains élèves semblent pressés de terminer et se contentent de deviner. »

Conseil : Rappelez aux élèves que l'objectif est bien l'exactitude et non pas le nombre de problèmes/questions auxquels ils ont répondu. Montrez aux élèves que leurs scores reflètent le nombre de réponses correctes. Suggérez-leur de ralentir le rythme et de viser l'exactitude la prochaine fois pour voir s'ils améliorent leur score. Insistez sur le fait que le but de ces activités est de les aider à développer leurs capacités à résoudre des problèmes.

« Certains de mes élèves sont anxieux lorsque je leur propose des activités en temps limité, surtout lorsque l'activité comporte un grand nombre de questions. »

Conseil : Si vous utilisez des feuilles d'exercices, les élèves peuvent ressentir de l'anxiété lorsqu'ils constatent qu'il y a un grand nombre de questions. Assurez-vous que les élèves savent qu'ils ne sont pas censés répondre à toutes les questions. Les élèves peuvent être moins anxieux lorsqu'ils considèrent que le nombre de questions est raisonnable. Au lieu de présenter une longue liste de questions, utilisez des cartes flash ou d'autres activités qui ne présentent pas d'emblée beaucoup de questions. Demander aux élèves de travailler en groupe pour « faire aussi bien ou battre » leur score collectif précédent peut également réduire la pression qu'ils peuvent ressentir quand ils sont invités à répondre individuellement.

Glossaire

A

Automatisme = capacité à produire des réponses rapides sans dépenser trop d'énergie mentale.

C

Compétences et connaissances = énoncé clair de ce que l'élève est censé apprendre ou être capable de faire.

Conception de l'enseignement = structure interne des activités d'enseignement et du matériel pédagogique organisés en fonction des apprentissages visés.

Concepts mathématiques = idées abstraites qui constituent le fondement des sujets mathématiques.

D

Début de phrase clé = message clé qui débute une phrase que l'élève doit terminer.

Définition adaptée = définition qui convient à des élèves, élaborée en ayant à l'esprit leurs besoins et leurs centres d'intérêt.

E

Exemple résolu = exemple qui montre la résolution d'un problème.

F

Fluence = capacité à répondre juste et avec aisance à des questions mathématiques, le plus souvent des opérations.

Fractions références = fractions usuelles utilisées comme point de comparaison pour aider les élèves à ordonner ou évaluer d'autres fractions.

I

Inconnue = quantité inconnue dans une équation ou dans un problème verbal.

Information non pertinente = information présente dans un problème verbal qui n'est pas utilisée lors de la résolution.

Intervention = enseignement ciblé s'adressant aux élèves en difficulté, en général sous la forme d'un soutien individuel ou en petits groupes.

L

Langage académique = langage ou vocabulaire utilisé à l'école, qui peut être spécifique à une discipline comme *isotope* ou *vecteur,* ou plus général avec des mots comme *inférer* ou *inconnu*.

Langage vernaculaire = langage courant.

M

Magnitude d'un nombre = représentation de la quantité associée au nombre (encore distance à zéro ou valeur absolue).

Matériel pédagogique = outils pédagogiques et ressources que les enseignants utilisent avec les élèves pour leurs activités et leur enseignement.

Méthode de résolution = stratégie ou méthode générale mise en œuvre pour résoudre un problème mathématique, y compris les étapes permettant de résoudre le problème.

P

Papier isométrique = papier au quadrillage triangulaire, souvent utilisé pour des représentations en pseudo-trois dimensions.

Problème verbal = problème décrit sous la forme d'une petite histoire et dont la réponse numérique est obtenue en utilisant les données du texte.

Q

Questions guidées = questions ouvertes posées aux élèves pour attirer leur attention sur des détails clés sans leur donner la réponse.

R

Représentations linéaires = représentation de concepts mathématiques ordonnés le long d'une droite.

S

Séquence d'enseignement = contenu ordonné de manière efficace de ce que l'élève va apprendre pour améliorer sa compréhension des mathématiques et acquérir les compétences et connaissances attendues, découpées en plusieurs séances.

Sujets mathématiques = thèmes centraux de l'apprentissage des mathématiques comme les nombres entiers, les nombres pairs et impairs, l'addition, les fractions et les nombres décimaux.

Notes

Références en **gras** : références sélectionnées par la méta-analyse du WWC.

1. NAEP, 2019.
2. La dernière modification et reconduction de l'ESEA dénommée aujourd'hui Every Student Succeeds Act (ESSA).
3. Gersten, Beckmann *et al.*, 2009.
4. Berkeley *et al.*, 2020.
5. Gersten, Beckmann *et al.*, 2009.
6. Clarke *et al.*, 2015 ; Steedly *et al.*, 2008.
7. Steedly *et al.*, 2008.
8. Steedly *et al.*, 2008.
9. **Fien *et al.*, 2016**.
10. **Barbieri *et al.*, 2019 ;** Steedly *et al.*, 2008.
11. **Barbieri *et al.*, 2019 ; Bryant *et al.*, 2011 ; Bryant *et al.*, 2016 ; Clarke *et al.*, 2014 ; Clarke *et al.*, 2017 ; Darch *et al.*, 1984 ; Doabler *et al.*, 2016 ; Dyson *et al.*, 2015 ; Dyson *et al.*, 2018 ; Fien *et al.*, 2016 ; Fuchs *et al.*, 2005 ; Fuchs *et al.*, 2006 ; Fuchs *et al.*, 2009 ; Fuchs *et al.*, 2010 ; Fuchs *et al.*, 2014 ; Fuchs, Fuchs *et al.*, 2008 ; Fuchs, Geary *et al.*, 2013 ; Fuchs, Malone *et al.*, 2016 ; Fuchs, Malone *et al.*, 2019 ; Fuchs, Powell *et al.*, 2008 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2013 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2016 ; Fuchs, Seethaler *et al.*, 2008 ; Fuchs, Seethaler *et al.*, 2019 ; Gersten *et al.*, 2015 ; Jayanthi *et al.*, 2018 ; Jitendra *et al.*, 1998 ; Jitendra, Dupuis *et al.*, 2013 ; Jitendra, Rodriguez *et al.*, 2013 ; Kanive *et al.*, 2014 ; Malone *et al.*, 2019 ; Powell *et al.*, 2009 ; Powell & Driver, 2015 ; Powell, Driver *et al.*, 2015 ; Powell, Fuchs *et al.*, 2015 ; Swanson, 2014 ; Swanson, Lussier *et al.*, 2013 ; Swanson, Moran *et al.*, 2013 ; Swanson, Moran *et al.*, 2014 ; Swanson, Orosco *et al.*, 2014 ; Tournaki, 2003 ; Wang *et al.*, 2019 ; Watt & Therrien, 2016**.
12. **Bryant *et al.*, 2011 ; Clarke *et al.*, 2014 ; Clarke *et al.*, 2017 ; Darch *et al.*, 1984 ; Dyson *et al.*, 2015 ; Dyson *et al.*, 2018 ; Fien *et al.*, 2016 ; Fuchs *et al.*, 2005 ; Fuchs *et al.*, 2006 ; Fuchs *et al.*, 2009 ; Fuchs *et al.*, 2010 ; Fuchs *et al.*, 2014 ; Fuchs, Fuchs *et al.*, 2008 ; Fuchs, Geary *et al.*, 2013 ; Fuchs, Malone *et al.*, 2019 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2013 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2016 ; Fuchs, Seethaler *et al.*, 2019 ; Jayanthi *et al.*, 2018 ; Jitendra *et al.*, 1998 ; Jitendra, Dupuis *et al.*, 2013 ; Jitendra, Rodriguez *et al.*, 2013 ; Kanive *et al.*, 2014 ; Malone *et al.*, 2019 ; Powell *et al.*, 2009 ; Powell & Driver, 2015 ; Powell, Driver *et al.*, 2015 ; Swanson, 2014 ; Swanson, Lussier *et al.*, 2013 ; Swanson, Moran *et al.*, 2013 ; Tournaki, 2003 ; Wang *et al.*, 2019**.

13. **Barbieri *et al.*, 2019 ; Bryant *et al.*, 2016 ; Doabler *et al.*, 2016 ; Fuchs, Malone *et al.*, 2019 ; Fuchs, Powell *et al.*, 2008 ; Fuchs, Seethaler *et al.*, 2008 ; Gersten *et al.*, 2015 ; Powell, Fuchs *et al.*, 2015 ; Swanson, Moran *et al.*, 2014 ; Swanson, Orosco *et al.*, 2014 ; Watt & Therrien, 2016**.

14. Clarke *et al.*, 2015 ; **Fuchs, Malone *et al.*, 2019 ;** Sawyer, 2006 ; Steedly *et al.*, 2008.

15. Schumacher *et al.*, 2018.

16. **Fuchs, Malone *et al.*, 2019 ; Watt & Therrien, 2016**.

17. **Barbieri *et al.*, 2019 ;** Clarke, Doabler, Smolkowski, Kurtz-Nelson *et al.*, 2016 ; **Darch *et al.*, 1984 ; Dyson *et al.*, 2015 ; Fuchs, Seethaler *et al.*, 2019**.

18. Doabler *et al.*, 2015 ; **Fuchs, Seethaler *et al.*, 2019 ;** Gersten, Beckmann *et al.*, 2009 ; **Jayanthi *et al.*, 2018 ;** Steedly *et al.*, 2008.

19. Clarke *et al.*, 2015.

20. Clarke *et al.*, 2015 ; Fyfe *et al.*, 2012 ; **Gersten *et al.*, 2015 ;** Moreno, 2004.

21. **Fuchs, Malone *et al.*, 2019 ; Watt & Therrien, 2016**.

22. Bay-Williams & Livers, 2009 ; Capraro & Joffrion, 2006 ; Dunston & Tyminski, 2013 ; Monroe & Orme, 2002 ; **Powell & Driver, 2015**.

23. Bay-Williams & Livers, 2009 ; Capraro & Joffrion, 2006 ; Monroe & Orme, 2002 ; **Powell & Driver, 2015**.

24. Bay-Williams & Livers, 2009 ; Capraro & Joffrion, 2006 ; Dunston & Tyminski, 2013 ; Monroe & Orme, 2002 ; **Powell & Driver, 2015**.

25. Bay-Williams & Livers, 2009 ; Capraro & Joffrion, 2006 ; Monroe & Orme, 2002 ; **Powell & Driver, 2015**.

26. Bay-Williams & Livers, 2009 ; Capraro & Joffrion, 2006 ; **Powell & Driver, 2015**.

27. Bay-Williams & Livers, 2009 ; Monroe & Orme, 2002 ; Pierce & Fontaine, 2009 ; **Powell & Driver, 2015**.

28. **Clarke *et al.*, 2017 ;** Dunston & Tyminski, 2013 ; Fuchs & Fuchs, 2001 ; Monroe & Orme, 2002.

29. Dunston & Tyminski, 2013 ; Fuchs & Fuchs, 2001.

30. NCTM, 2000 ; National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers, 2010.

31. Baroody *et al.*, 2009 ; Dunston & Tyminski, 2013 ; **Powell & Driver, 2015**.

32. **Bryant *et al.*, 2016 ; Clarke *et al.*, 2017 ; Doabler *et al.*, 2016 ; Dyson *et al.*, 2015 ; Fuchs *et al.*, 2009 ; Fuchs *et al.*, 2014 ; Fuchs, Geary *et al.*, 2013 ; Fuchs, Malone *et al.*, 2019 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2013 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2016 ; Fuchs, Seethaler *et al.*, 2019 ; Jayanthi *et al.*, 2018 ; Malone *et al.*, 2019 ; Powell & Driver, 2015 ; Smith *et al.*, 2013**.

33. **Clarke *et al.*, 2017 ; Dyson *et al.*, 2015 ; Fuchs *et al.*, 2009 ; Fuchs *et al.*, 2014 ; Fuchs, Geary *et al.*, 2013 ; Fuchs, Malone *et al.*, 2019 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2013 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2016 ; Fuchs, Seethaler *et al.*, 2019 ; Jayanthi *et al.*, 2018 ; Malone *et al.*, 2019 ; Powell & Driver, 2015**.

34. **Bryant *et al.*, 2016 ; Doabler *et al.*, 2016 ; Fuchs, Malone *et al.*, 2019 ; Smith *et al.*, 2013**.

35. Bryant *et al.*, 2003.

36. Bay-Williams & Livers, 2009 ; Bryant *et al.*, 2003 ; **Powell & Driver, 2015**.

37. Bay-Williams & Livers, 2009.

38. Beck *et al.*, 2002 ; Pierce & Fontaine, 2009 ; **Powell & Driver, 2015**.

39. Dunston & Tyminski, 2013 ; Roberts & Truxaw, 2013.

40. Bay-Williams & Livers, 2009 ; Bryant *et al.*, 2003 ; Dunston & Tyminski, 2013 ; Monroe & Orme, 2002 ; Pierce & Fontaine, 2009 ; **Powell & Driver, 2015**.

41. Bay-Williams & Livers, 2009 ; Monroe & Orme, 2002.

42. Bush *et al.*, 2020 ; Karp *et al.*, 2020.

43. Bush *et al.*, 2020 ; Karp *et al.*, 2020.

44. Adapted from Karp *et al.*, 2014.

45. Bay-Williams & Livers, 2009 ; Bryant *et al.*, 2003 ; Carlisle *et al.*, 2013 ; Dunston & Tyminski, 2013 ; Goerss *et al.*, 1999 ; **Powell & Driver, 2015 ;** Terrill *et al.*, 2004.

46. Bay-Williams & Livers, 2009 ; Bryant *et al.*, 2003 ; Dunston & Tyminski, 2013 ; Fuchs *et al.*, 2019 ; **Powell & Driver, 2015**.

47. Bay-Williams & Livers, 2009 ; Dunston & Tyminski, 2013 ; Pierce & Fontaine, 2009 ; Roberts & Truxaw, 2013.

48. Bay-Williams & Livers, 2009 ; **Clarke *et al.*, 2017 ; Fuchs, Malone *et al.*, 2019**.

49. Bay-Williams & Livers, 2009 ; **Fuchs, Malone *et al.*, 2019**.

50. **Fuchs, Seethaler *et al.*, 2019**.

51. Roberts & Truxaw, 2013.

52. Bush *et al.*, 2020 ; Karp *et al.*, 2020.

53. Baroody *et al.*, 2009 ; **Powell & Driver, 2015**.

54. **Bryant *et al.*, 2011 ; Fuchs, Fuchs *et al.*, 2008 ;** Jitendra *et al.*, 2016.

55. **Barbieri *et al.*, 2019 ; Bryant *et al.*, 2011 ; Bryant *et al.*, 2016 ; Clarke *et al.*, 2014 ; Clarke *et al.*, 2017 ; Doabler *et al.*, 2016 ; Dyson *et al.*, 2015 ; Dyson *et al.*, 2018 ; Fien *et al.*, 2016 ; Fuchs *et al.*, 2005 ; Fuchs *et al.*, 2014 ; Fuchs, Geary *et al.*, 2013 ; Fuchs, Malone *et al.*, 2019 ; Fuchs, Powell *et al.*, 2008 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2013 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2016 ; Fuchs, Seethaler *et al.*, 2019 ; Gersten *et al.*, 2015 ; Jayanthi *et al.*, 2018 ;**

Kanive *et al.*, 2014 ; Malone *et al.*, 2019 ; Powell & Driver, 2015 ; Powell, Driver *et al.*, 2015 ; Powell, Fuchs *et al.*, 2015 ; Smith *et al.*, 2013 ; Wang *et al.*, 2019 ; Watt & Therrien, 2016.

56. **Bryant *et al.*, 2011 ; Clarke *et al.*, 2014 ; Clarke *et al.*, 2017 ; Dyson *et al.*, 2015 ; Dyson *et al.*, 2018 ; Fien *et al.*, 2016 ; Fuchs *et al.*, 2005 ; Fuchs *et al.*, 2014 ; Fuchs, Geary *et al.*, 2013 ; Fuchs, Malone *et al.*, 2019 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2013 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2016 ; Fuchs, Seethaler *et al.*, 2019 ; Jayanthi *et al.*, 2018 ; Kanive *et al.*, 2014 ; Malone *et al.*, 2019 ; Powell & Driver, 2015 ; Powell, Driver *et al.*, 2015 ; Wang *et al.*, 2019**.

57. **Barbieri *et al.*, 2019 ; Bryant *et al.*, 2016 ; Doabler *et al.*, 2016 ; Fuchs, Malone *et al.*, 2019 ; Fuchs, Powell *et al.*, 2008 ; Gersten *et al.*, 2015 ; Powell, Fuchs *et al.*, 2015 ; Smith *et al.*, 2013 ; Watt & Therrien, 2016**.

58. Jitendra *et al.*, 2016 ; Witzel, 2005.

59. Witzel, 2005.

60. Jitendra *et al.*, 2016.

61. Jitendra *et al.*, 2016 ; Witzel, 2005.

62. Jitendra *et al.*, 2016 ; Witzel, 2005 ; Witzel *et al.*, 2003.

63. **Dyson *et al.*, 2015 ; Fuchs, Malone *et al.*, 2019**.

64. Chi *et al.*, 2001.

65. Witzel, 2005 ; Witzel *et al.*, 2003.

66. Witzel *et al.*, 2003.

67. Jitendra *et al.*, 2016.

68. Jitendra *et al.*, 2016.

69. **Watt & Therrien, 2016**.

70. Jitendra *et al.*, 2016.

71. Bush *et al.*, 2020 ; Karp *et al.*, 2020.

72. Bush *et al.*, 2020 ; Karp *et al.*, 2020.

73. **Fuchs, Schumacher *et al.*, 2016 ;** Geary *et al.*, 2008 ; Lannin *et al.*, 2020 ; Rittle-Johnson *et al.*, 2001.

74. **Barbieri *et al.*, 2019 ; Jayanthi *et al.*, 2018**.

75. **Dyson *et al.*, 2018 ;** Geary *et al.*, 2008 ; Lannin *et al.*, 2020 ; National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers, 2010.

76. National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers, 2010 (Standard: 3.MD.a.1).

77. National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers, 2010 (Standard: 5.G.a.1).

78. National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers, 2010 (Standards: 2.MD.d.9 ; 3.MD.b.4 ; 4.MD.b.4 ; 5.MD.b.2).

79. National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers, 2010 (Standard: 4.MD.a.2).

80. National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers, 2010 (Standard: 5.G.a.1)

81. **Dyson *et al.*, 2018 ;** Lannin *et al.*, 2020.

82. Geary *et al.*, 2008 ; Keijzer & Terwel, 2003 ; Lannin *et al.*, 2020 ; Schneider *et al.*, 2009 ; Siegler *et al.*, 2011.

83. Geary *et al.*, 2008 ; Lannin *et al.*, 2020.

84. **Barbieri *et al.*, 2019 ; Dyson *et al.*, 2018 ; Fuchs *et al.*, 2014 ; Fuchs, Geary *et al.*, 2013 ; Fuchs, Malone *et al.*, 2019 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2013 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2016 ; Fuchs, Seethaler *et al.*, 2019 ; Gersten *et al.*, 2015 ; Jayanthi *et al.*, 2018 ; Malone *et al.*, 2019 ; Powell *et al.*, 2009 ; Wang *et al.*, 2019**.

85. **Dyson *et al.*, 2018 ; Fuchs *et al.*, 2014 ; Fuchs, Geary, *et al.*, 2013 ; Fuchs, Malone *et al.*, 2019 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2013 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2016 ; Fuchs, Seethaler *et al.*, 2019 ; Jayanthi *et al.*, 2018 ; Malone *et al.*, 2019 ; Powell *et al.*, 2009 ; Wang *et al.*, 2019**.

86. **Barbieri *et al.*, 2019 ; Fuchs, Malone *et al.*, 2019 ; Gersten *et al.*, 2015**.

87. Fuson, 2009.

88. Lannin *et al.*, 2020.

89. **Barbieri *et al.*, 2019**.

90. **Barbieri *et al.*, 2019 ; Dyson *et al.*, 2018**.

91. Geary *et al.*, 2008.

92. **Barbieri *et al.*, 2019**.

93. Lannin *et al.*, 2020.

94. Geary *et al.*, 2008 ; Lannin *et al.*, 2020 ; Rittle-Johnson *et al.*, 2001.

95. Geary *et al.*, 2008.

96. Geary *et al.*, 2008.

97. Geary *et al.*, 2008.

98. Geary *et al.*, 2008.

99. Geary *et al.*, 2008.

100. Lannin *et al.*, 2020.

101. **Fuchs, Seethaler *et al.*, 2019 ; Jitendra, Dupuis *et al.*, 2013 ; Powell, Fuchs *et al.*, 2015**.

102. Batty *et al.*, 2010.

103. **Jitendra, Dupuis *et al.*, 2013**.

104. **Powell, Fuchs *et al.*, 2015**.

105. **Fuchs *et al.*, 2009**.

106. **Fuchs, Seethaler *et al.*, 2008 ; Jitendra *et al.*, 1998 ; Jitendra, Dupuis *et al.*, 2013 ; Swanson, Orosco *et al.*, 2014**.

107. **Darch *et al.*, 1984 ; Fuchs *et al.*, 2009 ; Fuchs *et al.*, 2010 ; Fuchs, Fuchs *et al.*, 2008 ; Fuchs, Malone *et al.*, 2019 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2016 ; Fuchs, Seethaler *et al.*, 2008 ; Fuchs, Seethaler *et al.*, 2019 ; Jitendra *et al.*, 1998 ; Jitendra, Dupuis *et al.*, 2013 ; Jitendra, Rodriguez *et al.*, 2013 ; Swanson, 2014 ; Swanson, Lussier *et al.*, 2013 ; Swanson, Moran *et al.*, 2013 ; Swanson, Moran *et al.*, 2014 ; Swanson, Orosco *et al.*, 2014 ; Wang *et al.*, 2019 ; Malone *et al.*, 2019**.

108. **Darch *et al.*, 1984 ; Fuchs *et al.*, 2009 ; Fuchs *et al.*, 2010 ; Fuchs, Fuchs *et al.*, 2008 ; Fuchs, Malone *et al.*, 2019 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2016 ; Fuchs, Seethaler *et al.*, 2019 ; Jitendra *et al.*, 1998 ; Jitendra, Dupuis *et al.*, 2013 ; Jitendra, Rodriguez *et al.*, 2013 ; Malone *et al.*, 2019 ; Swanson, 2014 ; Swanson, Lussier *et al.*, 2013 ; Swanson, Moran *et al.*, 2013 ; Wang *et al.*, 2019**.

109. **Fuchs, Seethaler *et al.*, 2008 ; Swanson, Moran *et al.*, 2014 ; Swanson, Orosco *et al.*, 2014**.

110. **Fuchs, Schumacher *et al.*, 2016 ; Fuchs, Seethaler *et al.*, 2019 ; Jitendra, Rodriguez *et al.*, 2013 ; Wang *et al.*, 2019**.

111. **Fuchs *et al.*, 2009**.

112. **Fuchs, Seethaler *et al.*, 2019**.

113. **Fuchs, Fuchs *et al.*, 2008 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2016 ; Malone *et al.*, 2019**.

114. **Fuchs *et al.*, 2010 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2016 ; Jitendra, Dupuis *et al.*, 2013 ; Jitendra, Rodriguez *et al.*, 2013**.

115. **Fuchs, Seethaler *et al.*, 2019 ; Jitendra, Dupuis *et al.*, 2013 ; Jitendra, Rodriguez *et al.*, 2013 ; Swanson, 2014 ; Wang *et al.*, 2019**.

116. **Fuchs *et al.*, 2009 ; Fuchs *et al.*, 2010 ; Jitendra, Rodriguez *et al.*, 2013**.

117. **Fuchs *et al.*, 2009 ; Fuchs *et al.*, 2010 ; Fuchs, Fuchs *et al.*, 2008**.

118. Cooper & Sweller, 1987 ; **Fuchs, Fuchs *et al.*, 2008**.

119. **Fuchs, Seethaler *et al.*, 2019 ; Swanson, Orosco *et al.*, 2014**.

120. **Fuchs, Schumacher *et al.*, 2016 ; Fuchs, Seethaler *et al.*, 2019 ; Jitendra, Rodriguez *et al.*, 2013**.

121. **Fuchs *et al.*, 2010 ; Fuchs, Seethaler *et al.*, 2019 ; Wang *et al.*, 2019**.

122. Gersten, Chard *et al.*, 2009 ; Kroesbergen *et al.*, 2004.

123. Karp *et al.*, 2019.

124. **Jitendra, Dupuis *et al.*, 2013 ; Jitendra, Rodriguez *et al.*, 2013**.

125. **Fuchs, Fuchs *et al.*, 2008 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2016**.

126. Baroody *et al.*, 2009 ; Geary *et al.*, 2007 ; Geary *et al.*, 2012 ; Jordan *et al.*, 2003.

127. Baroody *et al.*, 2009.

128. Baroody *et al.*, 2009 ; **Dyson *et al.*, 2015 ; Fuchs *et al.*, 2010 ; Kanive *et al.*, 2014 ;** Ketterlin-Geller *et al.*, 2008.

129. Baroody *et al.*, 2009 ; **Fuchs, Geary *et al.*, 2013 ; Fuchs, Powell *et al.*, 2008**.

130. Baroody *et al.*, 2009 ; **Fuchs *et al.*, 2009 ; Fuchs *et al.*, 2010**.

131. **Barbieri *et al.*, 2019 ; Bryant *et al.*, 2011 ; Dyson *et al.*, 2015 ; Dyson *et al.*, 2018 ; Fien *et al.*, 2016 ; Fuchs *et al.*, 2005 ; Fuchs *et al.*, 2006 ; Fuchs *et al.*, 2009 ; Fuchs *et al.*, 2010 ; Fuchs *et al.*, 2014 ; Fuchs, Geary *et al.*, 2013 ; Fuchs, Malone *et al.*, 2019 ; Fuchs, Powell *et al.*, 2008 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2013 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2016 ; Fuchs, Seethaler *et al.*, 2008 ; Fuchs, Seethaler *et al.*, 2019 ; Gersten *et al.*, 2015 ; Kanive *et al.*, 2014 ; Malone *et al.*, 2019 ; Powell *et al.*, 2009 ; Powell & Driver, 2015 ; Powell, Driver *et al.*, 2015 ; Powell, Fuchs *et al.*, 2015 ; Tournaki, 2003 ; Wang *et al.*, 2019**.

132. **Bryant *et al.*, 2011 ; Dyson *et al.*, 2015 ; Dyson *et al.*, 2018 ; Fien *et al.*, 2016 ; Fuchs *et al.*, 2005 ; Fuchs *et al.*, 2006 ; Fuchs *et al.*, 2009 ; Fuchs *et al.*, 2010 ; Fuchs *et al.*, 2014 ; Fuchs, Geary *et al.*, 2013 ; Fuchs, Malone *et al.*, 2019 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2013 ; Fuchs, Schumacher *et al.*, 2016 ; Fuchs, Seethaler *et al.*, 2019 ; Kanive *et al.*, 2014 ; Malone *et al.*, 2019 ; Powell *et al.*, 2009 ; Powell & Driver, 2015 ; Powell, Driver *et al.*, 2015 ; Tournaki, 2003 ; Wang *et al.*, 2019**.

133. **Barbieri *et al.*, 2019 ; Fuchs, Malone *et al.*, 2019 ; Fuchs, Powell *et al.*, 2008 ; Fuchs, Seethaler *et al.*, 2008 ; Gersten *et al.*, 2015 ; Powell, Fuchs *et al.*, 2015**.

134. **Dyson *et al.*, 2015 ; Fuchs, Geary *et al.*, 2013**.

135. **Powell *et al.*, 2009**.

136. **Dyson *et al.*, 2015**.

137. **Dyson *et al.*, 2015 ; Fuchs *et al.*, 2009 ; Fuchs *et al.*, 2010**.

138. **Dyson *et al.*, 2015 ; Fuchs *et al.*, 2009 ; Fuchs *et al.*, 2010**.

139. Baroody *et al.*, 2009.

140. **Fuchs *et al.*, 2014 ;** Fuchs, Fuchs, *et al.*, 2013.